# EUCLIDIS
# ELEMENTORUM
## LIBRI PRIORES XII.

EX

COMMANDINI ET GREGORII

VERSIONIBUS LATINIS.

*IN USUM JUVENTUTIS ACADEMICÆ.*

EDIDIT, PLURIBUS IN LOCIS AUXIT,

ET

IN DEPRAVATIS EMENDAVIT

SAMUEL, EPISCOPUS ROFFENSIS.

OXONII:
E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO.
MDCCCII.

# PRÆFATIO.

NIHIL omnino opus eſt, vel de conſiliis noſtris hic loci agere, quomodo ſcilicet Juventutem in diſciplinis Mathematicis optime inſtitui poſſe arbitramur, vel ea ſingulatim percurrere, quæ in hunc finem conficere, et in lucem emittere nobiſcum ſtatuimus. Etenim de omnibus hiſce abunde dictum eſt, in Prolegomenis ad Opuſcula ea Mathematica, quæ a nobis concinnata, e PRELO OXONIENSI nuperrime prodierunt; ubi et Euclidem quoque denuo edere in nos ſuſcepimus, et alteram etiam Diatribarum ſeriem, in quibus eos gnaviter ſe exercere neceſſe eſt, qui id ſibi exoptant, in ſubtili, ſiqua alia, ſcientiâ, recto ingredi tramite, et initia ejus accurate ponere.

Impræſentiarum itaque, quod noſtri magis officii eſt, et Lectori etiam magis intererit, paucis eum edoceri volumus, quid in hâc noſtrâ Euclidis

Editione a nobis præſtitum eſt, ſaltem quid ab aliis diverſimode, vel poſthabitis eorum conſiliis; ſed neque temere tamen aut infeliciter, uti ſpes eſt, niſi fallimur, et magnam in hoc negotio fruſtra inſumpſimus operam.

PRIMO igitur, plerique eorum, qui in uſum Studioſæ Juventutis Euclidem ediderunt, ſecus ac nos fecimus, non niſi priores ſex libros cum undecimo et duodecimo typis mandârunt; partim, ut opinamur, quia facile ſibi perſuaſerint, *ſeptimi*, *octavi*, et *noni* nullam eos jacturam facturos eſſe, qui vel in puerorum ſcholis, vel a quocunque demum præceptore *Arithmeticæ* Elementa didicerint; partim quia omnem libri *decimi* utilitatem parvi penderint, præ *Surdorum* doctrinâ, prout ab iis exponitur qui artem Algebraicam tradunt—quod inerudite magis factum ſit, neſcio, an oſcitanter; tam a ratione alienum eſt, juniores ad Algebram amandare, priuſquam Geometriæ Elementa rite calluerint, e quibus pendet etiam regularum Algebraicarum ſive veritas omnis, ſive evidentia. Etenim has ut artem quandam, ſi placeat, abſque Geometriâ quis condiſcat; ut ſcientiam non intelliget, nullâ Geometriæ ratione habitâ, quæ et ea amplectitur, e quibus generales Numerorum affectus exoriri compertum eſt. Rectius itaque nos, ut viſum eſt, et viam melius commonſtrantes, tres Euclidis libros qui de Numeris agunt, *ſeptimum* ſcilicet, *octavum* et *nonum*, Editioni noſtræ inſeruimus. De *decimo*, ut quod verum eſt confiteamur,

fiteamur, aliquamdiu dubitavimus; quia *Surdorum* doctrina, quatenus ibi traditur, angustior est, nec ullo modo fines eos attingit, ad quos provexerunt eam Scriptores Algebraici. Vicit tamen sententia, et hunc quoque librum ab aliis non divellere, tum ut Elementorum hæc Editio nostra ad libri duodecimi finem omnibus numeris absoluta esset, tum quia *Surdorum* doctrinam mirum est, quanto facilius pro se quisque arrepturus est, qui *Incommensurabilium* Mysteriis prius ab Euclide initiatus fuerit. Ad minimum, *viginti* priorum hujus Libri propositionum notitiam nemo est, qui commode desiderare poterit.

Per priores sex libros, ut et in undecimo et duodecimo, COMMANDINI textum secuti sumus, prout a Cl. *Keil*, Geometriæ Saviliano inter Oxonienses Professore, editus est: quoad libros quatuor intermedios, Latinam eorum versionem dedimus, quæ a GREGORIO concinnata est, eâ tamen ubique lege, ut quæ vel in hâc vel illâ manifeste depravata erant, ita a nobis emendarentur, ut res postulare visa est. Quod quidem sæpissime in Libris quinto, decimo, et undecimo faciendum erat. Porro autem vix credibile est, quam frequenter ex obscuris perspicua, et ex depravatis sana elicere datum est, immutatâ tantummodo Propositionum vel Definitionum serie, et in ordinem redactis, quæ, nescio quâ Editorum incuriâ, e locis suis turpiter antea amota erant. Hoc, exempli gratiâ, ipsissimum est, quod præter

alia de quibus mox dicturi fumus, quoad novem priores *Libri quinti* definitiones, audacter fecimus. Simul autem ut intelligant ii, qui Euclidem noftrum in manus fumpferint, quomodo fingula in aliis item editionibus difpofita funt, numeros ordinem apud eas indicantes ad oram libri femper apponi curavimus, quod et femel monuiffe fatis efto.

Verum in his, de quibus loquimur, definitionibus, ordinem earum immutare tantummodo, non erat ftatim in folido quoque locare omnia. Definitionem *feptimam* Libri quinti, quæ aliter penes nos *nona* fuiffet, abjecimus omnino et ablegavimus, et aliam ejus loco adfcripfimus, quæ Veterum Geometrarum ἀκρίβειαν magis faperet; rem, de quâ agit, dilucidius exponeret; et ex quâ Propofitionum, quæ ab ea pendent, demonftrationes, ope emendationis noftræ plus in fe elegantiæ fufciperent, et etiam perfpicuitatis. Cæterum ulterius indaganda res eft, et quæ ad quæftionem hanc pertinent, altius eruenda; ne aut nimiæ arguamur fiduciæ, aut etiam confilii, quod minus eft, male fufcepti.

Quotiescunque igitur dicimus duarum magnitudinum proportionem ad fe invicem, *majorem* vel *minorem* effe duarum aliarum magnitudinum proportione, loquimur *Catachreftice*. Proportio, fecundum ipfius Euclidis definitionem, fub illam e Categoriis cadit, quæ vocatur πρός τί. Porro autem illa, inter quæ intercedit relatio hæc, quam Propor-

Proportionem appellamus, quantitates sunt; nequit igitur relatio hæc in se τὸ πόσον suscipere; nequaquam enim fieri potest, unam eandemque rem simul et *relatum* esse, et *relationem*. Si itaque vocabulis nunquam, nisi legitime, uti concessum foret, nullo modo illud dicere liceret, proportionem quam habet A ad B, vel *majorem* esse vel *minorem* proportione, quæ inter alias duas magnitudines intercedit. Quam tamen loquendi formulam, quia ita voluit usus, "quem penes arbitrium est," eo, quem obtinuit, loco non ejecimus; tantummodo, quo sensu accipienda est, ostendere conati sumus, novam rei ipsius definitionem adhibentes, quæ verbis antea tam incongruis, et parum idoneis explicata est. Exinde etiam, ut supra dictum est, propositiones quæ e definitione de quâ agimus, omnino pendent, perspicue magis et dilucide demonstrare licuit. Immo et præter hæc suspicari consuevimus, definitionem a nobis adhibitam, vel eam esse, quam Euclides ipse posuit, vel, ad minimum, ei simillimam. Saltem, quæ toties ab Editoribus hoc in loco repetita est, ab Euclide profluxisse nullo modo censenda est; primo, quod verbis quibus ille nunquam conceptus suos in medium profert, exprimitur; tum autem præcipue, quod disciplinis Mathematicis prima, quod aiunt, labra admoventibus liquido non constet, unam eandemque magnitudinem ad secundam non posse habere *majorem* simul et *minorem* proportionem, (sensu definitionis illius, quæ vulgo circumfertur,) quam habet secunda ad tertiam.

Satis profecto ſcimus omnino hoc fieri non poſſe: ſed in eo ſubſiſtimus, *Tyronibus hoc non conſtare*, neque rem ita ſe habere aliquem iis comprobaturum eſſe, niſi propoſitionum ope, quæ ex aliquâ *majoris* et *minoris* proportionis definitione demonſtrandæ ſunt. His interea incommodis omnino vacat definitio noſtra. Ipſiſſimis effertur vocabulis, quibus et alibi Euclides utitur, ubi de re eâdem agit, (Vide *Dator. Definit.*) et ambiguitatem, quod maximum eſt, nullam omnino in ſe habet.

Cæterum, dum hæc ponimus, litem aliâ ex parte fortaſſe movebunt aliqui, et Definitioni noſtræ objicient, graviter laborare eam, quia *pro conceſſo ſumit*, aliquam ſemper exſtare magnitudinem, quæ ad datam magnitudinem datam quamvis proportionem habeat. Porro ob hoc ipſum inquient Euclidi eam minime omnium accenſendam eſſe, ſiquidem ille arbitrio ſuo nunquam ita utitur, nec a nobis exigit, ut concedamus exſtare aliquid, quod prius non docuit quomodo inveniamus, vel quibus artificiis in medium proferre poſſimus; quod eſt multorum e recentioribus, qui in eum Commentarios ſcripſerunt, tam fidenter et toties prolatum de Euclide judicium. Pace autem tantorum virorum, cauſâ idcirco non cadimus; nam quod afferunt ii, veritatem ſibi conſentientem non habet. Lege eâ, de quâ certant, Euclides ipſe ſe non obſtringit, ubi in Libro Elementorum quinto de illuſtribus iis et tam late paten-

patentibus relationibus agit, quas inter ſe habent quantitates continuæ, quicquid illud ſit, quod apud eum uſitatius eſt, (ſed tamen uſitatius tantummodo, non conſtanter et perpetuo factum) dum figurarum affectus ſpeciales tradit, aut effectionem problematum ad hos ſpectantium. Sed ut intra ea, quæ latius patent, diutius me non contineam, *hoc ipſum*, quod in definitione noſtrâ *pro conceſſo ſumitur*, ab Euclide ipso quoque *pro conceſſo ſumptum eſt*, ubi in ſecundæ et aliarum Libri duodecimi propoſitionum demonſtratione verſatur; ſicut et alios omnes facere neceſſe eſt, quotieſcunque per *Exhauſtionum* methodum, aliquid ponere volunt, aut certum eſſe oſtendere; cum iſtius methodi principium et origo, illud nimirum ſine quo nulla omnino eſſet, hoc ipſum ſit, quod et nos in definitione noſtrâ uſurpavimus. Unde obiter quoque notandum, quam inominato nonnulli e Libro quinto propoſitionum decimæ octavæ et aliarum quarundam demonſtrationes ſuſtulerint, quales in *Commandini* Editione juxta Theonem extant, et alias earum loco induxerint, non efficaciores, tædii autem et moliminis longe majoris. Et de his quidem hactenus.

Jam autem ex ipſâ ordinis immutatione, quæ nobis complacuit quoad novem priores Libri quinti definitiones, *tertiæ*, *quintæ*, et *ſextæ* apud nos, olim *tertiæ*, *octavæ*, et *nonæ*, luce clarior eſt utilitas, licet ita hallucinentur nonnulli, ut eas prorſus abjiciant, aut nihili pendant. Siquidem omnia a

nobis ita difpofita funt, ut tandem aliquando *μετά τινος ὁδȣ̃ καὶ τάξεως* explicetur hæc definitionum feries, impedita antea, et mire interturbata. Fac enim in iifdem periculum, prout apud alias Elementorum editiones extant, et nihil inveneris, quod aut perfpicuum, aut ad doctrinam utile, vel denique iis, quibus interponitur, fatis confonum eft—Rem ipfam deinde perpendito, et fubductis rationibus, quomodo ex falebris hifce quis fe expediat aliter quam nos fecimus, ut opinor, vix invenies. Infuper ordinem ipfum a nobis præfinitum aperte comprobant omnia, vel potius eum unice expofcunt. Primo enim de *Proportionum analogiâ* differere infulfum fuiffet, nifi prius, ut per definitionem *fextam* factum eft, olim *nonam*, ubi eam inveniremus, commoniti fuerimus; quod tamen ipfum, ubinam invenienda effet Analogia, fruftra indicaffet aliquis, qui illud etiam prius non oftenderat, quidnam Analogia ipfa fit, quod definitionis *quintæ*, olim *octavæ* officium eft. Porro effatum hoc, analogiam effe proportionum fimilitudinem, nihilo magis quam barbare dictum aliquid nos erudiviffet, fi non antea quoque intellexerimus, *quid effet* proportio, quod edocere, *tertiæ* definitionis eft. Totâ enim errant viâ, quod tamen fecerunt nonnulli aliter quidem non *ἀγεωμέτρητοι*, qui *proportionalitatem* five *analogiam* cum *proportione* quodammodo confundunt, et naturam ejus *feptima* Definitione, olim *quintâ*, fatis indicari opinantur. Etenim Definitio ifta neque de Analogiæ, neque de Proportionis naturâ quicquam omnino

omnino agit ἁπλῶς ſumptâ, et prout per ſe exſtat. Non iſtiuſmodi definitio eſt, quam ſummam et optimam eſſe ſtatuunt Dialectici, et quæ apud eos appellatur, λόγος τῆς ἐσίας. Deſcriptio rei per certa quædam attributa, quæ aſſidue eam comitantur, potius eſt, quam definitio abſoluta, et proprie ita dicta. Indicium ponit proculdubio, quo magnitudines proportionales, id eſt, eæ quæ, binæ comparatæ, ſimilitudine Proportionis inter ſe gaudent, ab aliis dignoſcantur, quæ eandem inter ſe non habent Proportionis convenientiam; quod tamen *Proportione ipſâ* non prius explicata, nihilo magis profuerat, quam ſi nobis dixerat aliquis, exempli gratiâ, quomodo corpora *vi electricâ prædita* ab aliis diſtingueremus, ignaris interea et omnino indoctis, quid ſit, vel in quo conſtaret ipſa *hæc vis electrica*. Rectiſſime igitur, et etiam neceſſario docet Definitio *tertia*, quid ſit *Proportio*, et id etiam per λόγον τῆς ἐσίας.

Quæritur a nonnullis etiam, quare ullâ omnino opus ſit Proportionis definitione, cum nullam expoſcant homines, ut ope ejus intelligant, quid a vocabulis " majus" aut " minus;" exempli gratiâ, aut " æquale" innuitur. Retorquendum eſt, quia voces illæ, ſimplex aliquid, et perſpicuum, et nullo negotio intelligendum exprimant; Proportio non item, ſed vocabulum ſit, quod licet in ore omnium, pauciſſimis tamen præfinitam aliquam aut perſpicuam rei ipſius cognitionem idcirco ſufficiat. Quod ſi aliter eſſet, non

non ut supra dictum est, ita omnia permiscerent homines, ut interdum etiam *Proportionem* et *Proportionalitatem* unam eandemque rem esse, ullo modo existimarent. Ponimus itaque non commodam tantummodo, sed necessariam esse *Proportionis* definitionem; ubi Græco sermone quis uteretur, præcipue, cum ex omnibus vocis λόγυ significationibus, nullam apud Græcos in se recipit, vulgo saltem et usitate, quæ proportionem innuere videatur.

Obstrepunt interea alii, et Euclidi objiciunt, definitionem *Proportionis* quæ ab eo tradita est, *Metaphysicam* esse, quod et certissime ita se habet. Neque tamen sola est, aut unica hujusce generis definitio, quâ Elementa sua ab Euclide munita sunt. Quid enim? Unitatis et Numeri apud eum Definitiones nonne etiam *Metaphysicæ* sunt? Quomodo autem sine harum rerum definitionibus, numerorum affectus explicare potuerat, vel quomodo res, quæ generis generalissimi tam fere sunt, aliter definire licuit, nisi *Metaphysice?*—Adde, *Metaphysicam* doctissimos e veteribus Geometris non tam aversari solitos esse, quam e recentioribus complures, qui tamen sibi mirifice plaudunt, et propter ingenii sui, et doctrinæ excellentiam.

Nosmet e contra Euclidis causam etiam ulterius agere non piget, et efficere, modo poterimus, ut *Definitionem hanc tertiam* in posterum homines non refugiant, quasi labem aliquam e *Metaphysicis*

*physicis* in se contraxerit. Nihil uspiam in Elementis suis ad examen adigit Euclides, nisi cujus antea dederit *definitionem essentiæ*, si excipias tres e figuris solidis, Sphæram nimirum, Conum rectum, et Cylindrum rectum; quas, quænam sint, ostendit, illud utique indicando, quomodo per motum generari possint, unde et vera eorum essentia statim mente percipitur. Præter hæc, ut diximus, in aliis omnibus pro definitione utitur λόγῳ αὐτῶν τῆς ὀσίας. Definitiones hujuscemodi omnes eæ sunt, quibus ostendit quid sit Circulus, quid Rhombus aut Quadratum, quid Prisma aut Pyramis, quid denique Angulus Planus. Si de Proportione igitur disserere inceperat, neque tamen prius illam per λόγον τῆς ὀσίας definierat, aliter et minus accurate egisset in re subtili et difficillimâ, quam pro more suo, in iis, quæ discentibus multo minus molestiæ facessunt. Quod si, simul ac ad Proportionem devenerit, et antequam de eâ ulterius ageret, definienda esset et ea quoque, prout cætera, per λόγον τῆς ὀσίας, quomodo aliter hoc, quam ab Euclide factum est, fieri potuisset, vellem mortalium aliquis mihi indicaret. *Relatio* enim est hæc Proportio, et nihil aliud, et *quantitatum* quoque, non aliarum rerum relatio. Essentia autem, vel alicujus τὸ τί ἦν εἶναι, alio modo definiri nequit, quam Categoriam indicando sub quam cadit, et enunciando quoque, quomodo ab aliis sub eandem Categoriam cadentibus diversa sit. Quorum utrumque ab Euclide factum est, eâ Proportionis definitione, quæ Libro Elementorum quinto præmittitur.

mittitur. Interea videri hanc definitionem magis *Metaphyficam*, quam eas, quibus Circulus docuit quid effet, aut Quadratum (exemplis tantummodo utimur) evenit propter rei ipfius naturam, tam longe a fenfibus remotæ, et a conceptibus quæ per eos intrant. *Figura* fcilicet ex eorum genere eft, quorum, cum non fint effentiæ primariæ, ἐσίαι πρῶται, ut cum Ariftotele loquamur, nulla omnino exiftentia eft præter eam quæ eft in fubjecto, ἐν ὑποκειμένῳ. Subjectum autem *figuræ* eft *Materies*, five Ὕλη. *Figuræ* itaque, Circuli, Quadrati, aut Trianguli exiftentia unice in *Corpore* eft; non tamen in αἰσθητῷ aliquo, (de *figuris* etenim perfectis jam loquimur, quoniam de illis tantummodo Mathefis agit) fed in ὕλη πεπερασμένη, (fiquidem hoc eft quod per "Corpus" fignificare volumus,) qualis *mente intelligenda eft.* In hâc inquam, et nullibi alias eft *figurarum* exiftentia—inter quæ evenit tamen, ut earum adumbrationes quædam in iis quoque appareant, quæ αἰσθητὰ funt, et quæ *fenfibus fubjiciuntur.* Porro quoniam quamplurimis contingit εἴδωλα hæc, five umbras, pro rebus ipfis fumere, Triangulum et aliæ quævis figuræ tam per *phantafiam*, quam per *intellectum* agnofcuntur; et in hifce omnibus, λόγος τῆς ἐσίας *phantafma* rei *perceptioni* neceffario objicit, pariter ac *formam* ejus *intellectui.* E quibus, non vulgus tantummodo, fed omnes fere qui Veterum Dialecticâ non imbuti funt, in *phantafmate* hærere potius quam in *formâ intellectuali* folent, tanquam hoc melius et certius

rem

rem ipſam repræſentaret, contra illud quod verum eſt. Quoad *Proportionem* interea, quæ *mera Relatio* eſt, *phantaſma* ejus nullum omnino exhiberi poteſt, quod intueamur, et in quo ſenſuum ope ſe defigat animus, quod vitio Euclidi vertitur et definitioni ejus ; quaſi *per eum* proportionis doctrina difficilis eſſet et obſcura, dum tamen *e rei ipſius naturâ* omnino exoritur, ſi quid hujuſcemodi ſit circa eam incommodum. Neque enim non iiſdem opprobriis oneratæ fuiſſent etiam Circuli apud eum, vel Quadrati definitiones, ſi ſimilitudinem aut adumbrationem quadrati vel circuli in externis rebus nunquam viderimus. Sed ut poſt unum jam verbum aut alterum diſputatio hæc ad finem perducatur—meditati enim ſumus præfationem, ſcripſimus fere commentarios.

Diſcrepantibus in tantum et conturbatis hominum de hac Matheſeos partitione ſententiis, nihil mirum eſt, ſi inveteraverint etiam loquendi de eâ formulæ, neque veritati, neque ſibi ipſis conſonæ. Alii itaque vocabula " rationem" et " proportionem," alii " proportionem" et " proportionalitatem" promiſcue uſurparunt, ut ſi eadem utriuſque ſignificatio eſſet ; " rationem" alii dixerunt " proportionem" eſſe quam habet magnitudo una ad aliam, quaſi Proportio *genus* eſſet, Ratio interea *ſpecies*—omnia multo aliter, quam oportuit. Quod verum et legitimum eſt, λόγον per Rationem, et ἀναλογίαν, per Proportionem, ubi Græca Latino ſermone proferenda ſunt, unice exprimere debemus.
Sed

Sed incuriam quæ tam diu invaluit, non noſtri eſt amovere, neque ſatis commodum eſſet jam aliter, quam ex recepto more loqui; unde factum eſt nos etiam Proportionis nomine λόγον indicaſſe, et ἀναλογίαν, ubi Græco vocabulo non utimur, Proportionalitatem appellâſſe, vel potius, ubi noſmet ipſi loquimur, Proportionis convenientiam.

Abſolutis hiſce, in iis quæ de opere hoc noſtro etiamnum dicenda reſtant, Lectorem non diu morabimur. *Decimus* Elementorum Liber, utpote qui minime, vel a doctis, vel a diſcentibus attrectatur, longe majorem quam alii emendationem poſtulabat, et operâ noſtrâ pluries emendatus eſt. Neque tamen opus eſt, ut eorum quæ ibi interjecimus, vel etiam reſtituimus, ratio a nobis ſingulatim reddatur. Adeo cuivis, ut opinamur, pro re natâ manifeſtum erit, quâ de cauſâ et quibus conſiliis hujuſcemodi omnia immutavimus. Quod in Libro *undecimo* a nobis factum eſt, quæ extra dubium deſiderabatur, *Paralleliſmi Rectæ lineæ et Plani* definitionem adjecimus; definitiones ipſas in ordinem redegimus; et *ſimilium Solidarum figurarum* definitionem, (*nonam* olim, penes nos *undecimam*,) eâ ex parte auximus quâ manca erat et imperfecta; ita ut ſtatim ex illâ, et per confectarium agnoſcenda ſit *ſimilium eorum Solidorum* æqualitas, in quibus *latera homologa ſunt æqualia*. Quare et omnino quoque abjecimus eam, quæ in cæteris editionibus tradita

tradita eſt, *æqualium et ſimilium ſolidorum* Definitionem; quæ eo nomine etiam appellari nunquam debuit, cum nothum tantummodo Theorema ſit, quod fuſius oſtendit SIMSONUS in Euclide ſuo Anglice reddito; ubi diſerte quoque indicavit, quibus in locis res ita ſe habitura eſſet, et novas earum propoſitionum demonſtrationes concinnavit, quæ neque ex accuratâ definitione antea derivatæ erant, neque rectâ ratiocinatione abſolutæ. Quin et majus aliquod a nobis, et amplius factum eſt. Emendatâ *Solidorum ſimilium* definitione, et poſitis accurate iis quæ *æqualitatem* eorum indicare poſſint, propoſitiones Libri *undecimi* 25tam, 27mam, 28vam, 29nam, 31mam, et 33iam, una cum *duodecimi* tertiâ et octavâ, quantum conjecturâ aſſequi poſſumus, ita demonſtratas dedimus, ut ab Euclide ipſo veriſimile eſt eas olim prodiviſſe. Neque temere hoc a nobis dictum eſſe quivis pro ſe intelligat. In omnibus enim, quæ ita emendavimus, nihil aliud operâ noſtrâ factum eſt, vel omnino faciendum erat, quam in demonſtrationibus reponere, quod in ſingulis omnino deſiderabatur—illud nimirum, quod, neſcio quâ incuriâ, e *Solidorum ſimilium* definitione pariter excidiſſe cenſendum eſt, utcunque neque in vetuſtiſſimis Elementorum Editionibus, neque etiam in Codicibus MSS. inveniatur. Problematis inſuper, de quo agit Propoſitio Libri *undecimi* viceſima ſexta, ſolutionem adjecimus uberiorem multo, quam, quæ ex anguſtis ſuis principiis a SIMSONO prolata eſt.

*Corollaria,*

*Corollaria*, *Lemmata*, et *Scholia*, quæ locis innumeris in hâc noſtrâ Euclidis Editione interjecta ſunt, et quæ in receptis editionibus non inveneris, ſive ex aliis deſumpta, ſive a nobis concinnata, aſteriſmo notantur. Quibus auctoris nomen non adſcribitur, ea omnia a nobis profecta ſunt. Quæcunque autem ſint ea, vel quales quales, quæ in Editione hâc noſtrâ fecimus emendationes, ducem in pleriſque eorum SIMSONUM certiſſime non ſecuti ſumus; propter quod a nonnullis ſatis certo improbabimur, ab aliis fortaſſe, ut fieri ſolet, diverſum experiemur judicium. Aliud interea nobis propoſitum fuit, et aliud unice in Euclide emendando, Euclide ipſo duntaxat magiſtro uti, per omnia intueri eum, et ad illius mentem, quantum fieri potuit, omnia componere. Porro autem, licet in eandem cum nobis arenam deſcenderit, cum SIMSONO multoties non ſentimus; ubique non aſtipulamur ejus de aliis Elementorum Editoribus judicio; quin et ex iis etiam quæ Operi ſuo inſeruit, ſupervacanea nonnulla, aut infructuoſa, impedita alia, et æquo longiora nobis ſemper viſa ſunt. Immo hoc ipſum erat, ut rem non diffiteamur, quod primo omnium ad Opus hoc noſtrum excitavit nos, et tandem aliquando etiam ad conficiendum impulit — certa nimirum neque unquam immutata opinio, Euclidem a SIMSONO ſermone Anglico donatum Juventutis Academicæ inſtitutioni non ſufficere, aut ſatis fideliter Veterum Geometrarum methodum, quæ nunquam non ἀκριβεστάτη eſt, iis in con-

ſpectu

ſpectu ponere. Sed neque interea quoque, in egregii iſtius Viri exercitationibus, non confitemur iidem ineſſe multa et artificii ſingularis, et exquiſitæ elegantiæ, quibus ſpartam quam nactus eſt feliciter ornavit, et unde laudem ſibi jure adeptus eſt non mediocrem. Valeas, Lector, et quæ tibi in manus tradita ſunt, æqui bonique conſulas.

*Dabamus ex Ædibus Bromleianis,*
*Kal. Mart.* MDCCCII.

S. R.

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER PRIMUS.

### DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

PUNCTUM eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe

B contin-

contingentium, et non in dire&tum jacentium, alterius ad alteram inclinatio *.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.



XII.

Acutus autem, qui recto eſt minor.

XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

XIV.

Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, unâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab uno puncto, intra figuram exiſtente, omnes rectæ lineæ pertingentes ſunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, et ex utrâque parte a circumferentiâ circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum fecat.

XVIII.

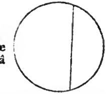
Semicirculus eſt figura, quæ contincłur diametro, et eâ circuli circumferentiâ, quæ a diametro intercipitur.

* *Cum plures anguli ad unum punctum exiſtunt, deſignatur quilibet tribus literis; quarum illa quæ eſt ad verticem anguli, in medio ponitur,* e. g. *in Fig. Prop.* XIII. *libri primi angulus rectis* A B, B C *comprehenſus dicitur angulus* A B C; *et angulus rectis* A B, B E *contentus dicitur angulus* A B E.

XIX,

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ rectâ lineâ, et circuli circumferentiâ continetur.



XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum, æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

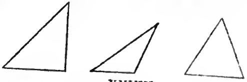


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

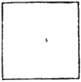


XXVIII.

Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.



XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum eſt, quod et æquilaterum eſt, et rectangulum.

XXXI.

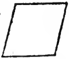
Alterâ parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

XXXIII.





Rhomboides, quæ et oppoſita latera, et oppoſitos angulos inter ſe æquales habens, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, et ex utrâque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

## POSTULATA.

I.

Poſtuletur a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Quovis centro, et intervallo, circulum deſcribere.

AXIO-

## AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, et inter ſe ſunt æqualia.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt æqualia.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, tota ſunt inæqualia.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

VI.

Et quæ cjuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VII.

Et quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Totum eſt ſuâ parte majus.

X.

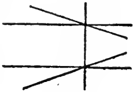
Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

XII.

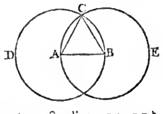
Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores, et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ, in infinitum productæ, inter ſe conveniunt ex eâ parte, in quâ ſunt anguli duobus rectis minores. Vid. Cor. Prop. xxviii. 1[m1].



[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

*Super datâ rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.*

Sit data recta linea terminata A B. Oportet super ipsâ A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur B C D[a]. Et rursus centro B, intervalloque B A, describatur circulus A C E[a], et a puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A, B ducantur rectæ lineæ C A, C B[b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B[c] æqualis. Rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A: ostensa est autem et C A æqualis A B: utraque igitur ipsarum C A, C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis: tres igitur C A, A B, B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, et constitutum est super datâ rectâ lineâ terminatâ A B. *Q. E. F.*

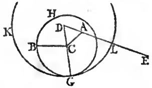



[a] Post. 3.
[b] Post. 1.
[c] Def. 15.

[II.] PROP. II. PROBL.

*Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.*

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C: oportet ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur a puncto A ad C recta linea A C[d]: et super ipsa constituatur triangulum æquilaterum D A C[e]: producanturque in directum ipsis D A, D C rectæ lineæ A E, C G[f]. Et centro quidem C, intervallo autem B C, circulus B G H describatur[g]. Rursusque centro D, et intervallo D G, describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis[h]. Et



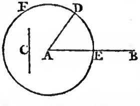

[d] Post. 1.
[e] 1. hujus.
[f] Post. 2.
[g] Post. 3.
[h] Def. 15.

Et rurfus quoniam D centrum eft circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A eft æqualis D C: reliqua igitur A L reliquæ G C eft æqualis [i]. Oftenfa autem eft B C æqualis C G. Quare utraque ipfarum A L, B C eft æqualis ipfi C G. Quæ autem eidem æqualia funt, et inter fe funt æqualia. Ergo, et A L eft æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis pofita eft A L. *Q. E F.* [i] Axiom. 3.

## PROP. III. PROBL. [III.]

*Duabus datis rectis lineis inæqualibus, a majore minori æqualem abfcindere.*

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B et C; quarum major fit A B: oportet a majore A B minori C æqualem rectam lineam abfcindere. Ponatur ad A punctum ipfi C æqualis recta linea A D [k]; et centro quidem A, intervallo autem A D, circulus defcribatur D E F [l]. Et quoniam A centrum eft D E F circuli, erit A E ipfi A D æqualis. Sed et C æqualis A D. Utraque igitur ipfarum A E, C ipfi A D æqualis erit. Quare et A E ipfi C eft æqualis [m]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus A B et C, a majore A B minori C æqualis abfciffa eft A E. *Q. E. F.*




[k] Per antecedentem.

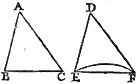
[l] Poft. 3.

[m] Axiom. 1.

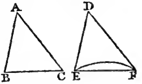
## PROP. IV. THEOR. [IV.]

*Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et bafim bafi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera fubtenduntur.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipfi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico,



et basim B C basi E F æqualem esse, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum A B C angulo D E F; et angulum A C B angulo D F E.




Triangulo enim A B C applicato ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero lineâ A B ipsi D E applicatâ: et punctum B puncto E congruet; quod A B ipsi D E sit æqualis. Congruente autem A B ipsi D E; congruet et A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. Quare, et C congruet ipsi F: est enim recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, et punctum B congruebat puncto E. Ergo, et basis B C basi E F congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F, basis B C basi E F non congruat;

n Ax. 10. duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod [n] fieri non potest. Congruet igitur B C basis basi E F, et ipsi æqualis erit. Quare, et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales

o Ax. 8. erunt [o]. Videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: et basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. *Q. E. D.*

## [V.] PROP. V. THEOR.

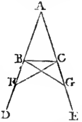
*Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.*

Sit isosceles triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur in directum ipsis A B, A C rectæ lineæ B D, C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum vero C B D angulo B C E æqualem esse. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum

p 3. hujus. F: atque a majore A E minori A F æqualis [p] auferatur A G: junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F est æqualis A G; A B vero ipsi A C; duæ F A, A C, duabus G A,

A B

A B æquales ſunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. Baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis [q], et triangulum A F C æquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus vero A F C angulo A G B. Et quoniam tota A F toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit [r] et reliqua B F reliquæ C G æqualis. Oſtenſa eſt autem F C æqualis G B. Duæ igitur B F, F C duabus C G, G B æquales ſunt, altera alteri; et angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtque baſis ipſorum B C communis. Ergo et triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B; et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus [s] A B C reliquo A C B æqualis: et ſunt ad baſim A B C trianguli. Oſtenſus autem eſt et F B C angulus æqualis angulo G C B; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. *Q. E. D.*




[q] 4. hujus.

[r] Ax. 3.

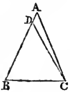
[s] Ax. 3.

*Cor.* Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

## PROP. VI. THEOR. [VI.]

*Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, et æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.*

Sit triangulum A B C, habens angulum A B C angulo A C B æqualem. Dico et A B latus lateri A C æquale eſſe. Si enim inæqualis eſt A B ipſi A C; altera ipſarum eſt major. Sit major A B; atque a majori A B minori A C æqualis [t] auferatur D B; et D C jungatur. Quoniam igitur D B eſt æqualis ipſi A C; communis autem B C: erunt duæ D B, B C duabus A C, C B æquales, altera alteri;




[t] 3. hujus.

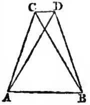
teri; et angulus D B C æqualis angulo A C B, ex hyp. [u] 4. hujus. Basis igitur D C basi A B est[u] æqualis, et triangulum D B C æquale triangulo A C B, minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualia sunt latera A B, A C. Æqualia sunt igitur. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt. *Q. E. D.*

*Cor.* Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

[VII.] PROP. VII. THEOR.

*In eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.*

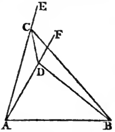
Si enim fieri potest, in eâdem rectâ lineâ A B duabus eisdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D, D B æquales, altera alteri, constituantur, ad aliud atque aliud punctum C et D, ad easdem autem partes C et D, eosdem habentes terminos A et B, quos primæ rectæ lineæ; ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa D A, terminum habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; et C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, [x] 5. hujus. et angulus A C D angulo A D C æqualis[x]. Major igitur est A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B, et angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eâdem rectâ lineâ, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. *Q. E. D.*




SCHO-

SCHOLION.*

Si punctorum C, D alterum D angulo A C B subsit, rectis ad alterum ductis comprehenso, demonstratio ad exemplum praecedentis instituenda est, ex parte posteriore propositionis quintae. Productis enim AC, AD, anguli E C D, F D C, qui ad basim trianguli isoscelis C A D sunt externi, inter se aequales erunt[y]; angulus igitur B D C, angulo E C D major; angulo igitur B C D ille B D C multo major; sed propter aequales B D, B C, angulus B D C angulo B C D[z] aequalis, major minori. Quod est absurdum. [y] 5. hujus. [z] 5. hujus.

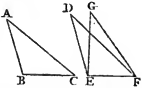


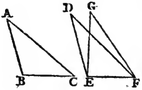

Si autem in alterutrâ ipsarum A C, B C sumatur punctum D, propositio statim constat: aliter enim toti A C vel B C pars ejus A D, vel B D aequalis esset, quod[a] fieri non potest. [a] Ax. 9.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi aequalem; angulum quoque, qui aequalibus lateribus continetur, angulo aequalem habebunt.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quae duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F aequalia habeant, alterum alteri; ut sit A B quidem aequale D E; A C vero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F aequalem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F aequalem esse. Triangulo enim A B C applicato ipsi D E F triangulo, et puncto quidem B posito in E; rectâ vero lineâ B C ipsi E F applicatâ: congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est aequalis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent et B A, A C ipsis E D, D F: si enim basis quidem B C basi E F congruat; latera autem B A, A C lateribus E D, D F non congruant, sed situm mutent;





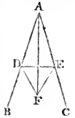
tent; ut E G, G F: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. Non [b] Per 7. hujus. constituuntur autem; ut demonstratum est[b]. Non igitur, si basis B C congruat basi E F, non congruent et B A, A C latera lateribus E D, D F: congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque, æqualibus lateribus contentum, angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[IX.]

## PROP. IX. PROBL.

*Datum angulum rectilineum bifariam secare.*

Sit datus angulus rectilineus B A C: oportet autem ipsum bifariam secare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; et a linea A C [c] 3. hujus. ipsi A D æqualis[c] auferatur A E; junctaque [d] 1. hujus. D E, constituatur super ea[d] triangulum æquilaterum D E F; et A F jungatur. Dico angulum B A C a recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A, A F duabus E A, A F æquales sunt, altera alteri; et basis D F æqualis [e] 8. hujus. basi E F: angulus[e] igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C a recta linea A F bifariam sectus est. *Q. E. F.*

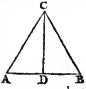


[X.]

## PROP. X. PROBL.

*Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.*

Sit data recta linea terminata A B; oportet ipsam A B [f] 1 hujus. bifariam secare. Constituatur super[f] ea triangulum æquilaterum A B C; et se[g] 9. hujus. cetur A C B angulus[g] bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C, C D dua-



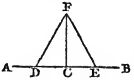
bus

bus B C, C D æquales sunt, altera alteri; et angulus A C D æqualis angulo B C D: basis igitur A D basi B D est [h] æqualis. Et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D. *Q. E. F.* [h] 4. hujus.

PROP. XI. PROBL. [XI.]

*Datæ rectæ lineæ, a puncto in ipsâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.*

Sit data recta linea A B, et datum in ipsâ punctum C: oportet a puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D: ipsique C D æqualis [i] ponatur C E, et super D E constituatur [k] triangulum æquilaterum F D E, et F C jungatur.



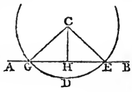

[i] 3. hujus.
[k] 1. hujus.

Dico datæ rectæ lineæ A B, a puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C, C F duabus E C, C F æquales, altera alteri; et basis D F est æqualis basi E F: angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis; et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus [l] est uterque æqualium angulorum: ergo uterque ipsorum D C F, E C F est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ A B, a puncto in ipsâ dato C, ad rectos angulos ducta est F C recta linea. *Q. E. F.* [l] Def. 10.

PROP. XII. PROBL. [XII.]

*Super datâ rectâ lineâ infinitâ, a dato puncto quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere.*

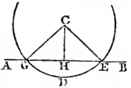
Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in eâ non est. Oportet super datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: et centro quidem C, intervallo autem C D, circulus [m] describatur E D G: et E G in H bifariam [n] secetur: jungan-




[m] Post. 3.
[n] 10. hujus.

turque

turque C G, C H, C E. Dico ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularem C H ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt G H ipſi H E, communis autem H C, duæ G H, H C duabus E H, H C æquales ſunt, alter alteri; et baſis C G eſt æqualis baſi




° 8. hujus. C E. Angulus igitur C H G angulo C H E eſt° æqualis; et ſunt deinceps. Cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales

p Def. 10. inter ſe fecerit; rectus p eſt uterque æqualium angulorum, et quæ inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit: ergo ſuper datâ rectâ lineâ infinitâ A B, a dato puncto C, quod in eâ non eſt, perpendicularis ducta eſt G H. *Q. E. F.*

[XIII.]

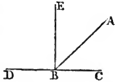
## PROP. XIII. THEOR.

*Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.*

Recta enim linea quædam A B ſuper rectam C D conſiſtens angulos faciat C B A, A B D. Dico C B A, A B D angulos, vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales. Si enim C B A eſt æqua-

q Def. 10. lis ipſi A B D; duo recti q ſunt: ſin minus, ducatur a puncto B ipſi

r 11. hujus. C D ad rectos r angulos B E: anguli igitur C B E, D B E ſunt duo




recti. Et quoniam C B E duobus C B A, A B E eſt æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli duo C B E,

s Ax. 2. E B D tribus angulis C B A, A B E, E B D ſunt s æquales. Rurſus quoniam D B A angulus eſt æqualis duobus D B E, E B A, communis apponatur A B C: anguli igitur duo D B A, A B C tribus D B E, E B A, A B C æquales ſunt. At oſtenſum eſt angulos quoque C B E, E B D eiſdem

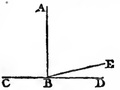
t Ax. 1. tribus æquales eſſe: quæ vero eidem ſunt æqualia t, et inter ſe æqualia ſunt: ergo et anguli C B E, E B D ipſis D B A, A B C ſunt æquales: ſunt autem C B E, E B D duo recti; anguli igitur D B A, A B C duobus rectis æquales erunt. Ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.*

Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in eâ B, duæ rectæ lineæ B C, B D, non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A B C, A B D duabus rectis æquales faciant. Dico B D ipsi C B in directum esse: si enim B D non est in directum ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E.

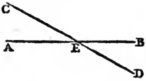



Quoniam igitur recta linea A B, super rectam C B E consistit; anguli A B C, A B E [u] duobus rectis sunt æquales. [u] 13. hujus. Sed et anguli A B C, A B D sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur C B A, A B E ipsis C B A, A B D æquales erunt. Communis auferatur A B C. Ergo reliquus A B E reliquo A B D est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur B E est in directum ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter B D. Ergo C B ipsi B D in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in eâ duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. *Q. E. D.*

## PROP. XV. THEOR. [XV.]

*Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.*

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectam C D consistens angulos facit C E A, A E D;




erunt hi [x] duobus rectis æquales. Rursus quoniam [x] 13. hujus. recta linea D E super rectam A B consistens facit angulos A E D, D E B; erunt A E D, D E B anguli æquales [y] duobus [y] 13. hujus. rectis.

rectis. Ostensum autem est angulos quoque C E A, A E D duobus rectis esse æquales. Anguli igitur C E A, A E D angulis A E D, D E B æquales sunt. Communis auferatur
[a] Ax. 3. A E D. Ergo reliquus [a] C E A reliquo B E D est æqualis. Simili ratione, et anguli C E B, D E A æquales ostendentur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. *Q. E. D.*

*Cor.* 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas, se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

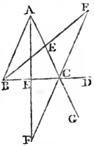
*Cor.* 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

[XVI.]

## PROP. XVI. THEOR.

*Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito est major.*

Sit triangulum ABC, et unum ipsius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D utrovis interiore, et opposito, videlicet C B A, et B A C majorem
[a] 10. hujus. esse. Secetur enim A C bifariam [a] in E, et juncta B E producatur ad F; ponaturque ipsi B E æqualis E F. Jungatur præterea F C, et A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est æqualis E C, B E vero ipsi E F; duæ A E, E B, duabus C E, E F æquales sunt, altera alteri: et angu-
[b] 15. hujus. lus A E B angulo F E C est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur
[c] 4. hujus. A B æqualis [c] est basi F C; et A E B triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus B A E est æqualis angulo E C F. Sed A C D angulus major est ipso B C F. Major igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter rectâ lineâ B C bifariam sectâ, ostendetur etiam B C G angulus, hoc est A C D angulus, angulo A B C major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore et opposito major est. *Q. E. D.*

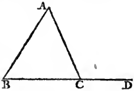



PROP.

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.*

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duos angulos, quomodocunque sumptos, duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus A C D major [c] est interiore, et opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD, A C B angulis A B C, A C B majores sunt. Sed A C D, A C B sunt [d] æquales duobus rectis. Ergo A B C, B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque B A C, A C B, itemque C A B, A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

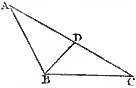



[c] 16. hujus.
[d] 13. hujus.

## PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

*Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.*

Sit triangulum A B C, habens latus A C latere A B majus. Dico et A B C angulum angulo B C A majorem esse. Quoniam enim A C major est, quam A B, ponatur ipsi A B æqualis A D; et B D jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [e] interiore, et opposito DCB. Sed ADB æqualis [f] est ipsi ABD, quod et latus A B lateri A D sit æquale; major igitur est et A B D angulus angulo A C B. Quare A B C ipso A C B multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit. *Q. E. D.*

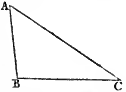



[e] 16. hujus.
[f] 5. hujus.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

*Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.*

Sit triangulum A B C, majorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B majus esse. Si enim non est majus A C, vel æquale est ipsi A B, vel ipso minus; æquale autem non est; nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset [g]; non est autem. Non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus; esset enim et angulus A B C angulo A C B minor [h]; atqui non est. Non igitur A C minus est ipso A B. Ostensum autem est neque æquale esse. Ergo A C ipso A B est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. *Q. E. D.*



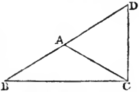

g 5. hujus.

h 18. hujus.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

*Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.*

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem B A, A C majora latere B C; latera vero A B, B C majora latere A C: et latera B C, C A majora ipso A B. Producatur enim B A ad punctum D; ponaturque ipsi C A æqualis A D [i]; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis [k]. Sed B C D angulus major est angulo A C D; angulus igitur B C D angulo A D C est major. Et quoniam triangulum est D C B habens B C D angulum majorem angulo B D C; majorem autem angulum majus latus subtendit [l]; erit latus D B latere B C majus; sed D B est æquale ipsis B A, A C; quare latera B A, A C ipso B C majora sunt. Similiter ostendemus et latera quidem A B, B C majora esse latere C A: latera vero B C, C A ipso A B majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. *Q. E. D.*




i 3. hujus.

k 5. hujus.

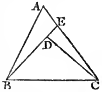
l 19. hujus.

PROP.

## PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

*Si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.*

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD, DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora[m], erunt trianguli ABE duo latera BA, AE majora latere BE. Communis apponatur EC. Ergo BA, AC ipsis BE, EC majora[n] sunt. Rursus quoniam CED trianguli duo latera CE, ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB; quare CE, EB ipsis CD, DB sunt majora[n]. Sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC: multo igitur BA, AC ipsis BD, DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major[o]; erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major[o]; sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. *Q. E. D.*




[m] 20. hujus.
[n] Ax. 4.
[o] 16. hujus.

## PROP. XXII. PROBL. [XXII.]

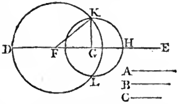
*Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliquâ majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.*

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliquâ majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A, B quidem sint majores quam C; A, C vero majores quam B: et præterea B, C majores quam A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum constituere.

 Exponatur

ponatur aliqua recta linea D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi quidem A æqualis [p] D F, ipsi vero B æqualis F G, et ipsi C æqualis G H; et centro F, intervallo autem F D, circulus [q] describatur D K L; rursusque centro G, et intervallo G H, alius circulus K L H describatur, et jungantur K F, K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A, B, C triangulum K F G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L circuli, erit F D æqualis [r] F K; sed F D est æqualis A; ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, crit G H æqualis [r] G K; sed G H est æqualis C; ergo et G K ipsi C æqualis erit. Est autem et F G æqualis B. Tres igitur rectæ lineæ K F, F G, G K tribus A, B, C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis K F, F G, G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est K F G. *Q. E. F.*

[p] 3. hujus.
[q] 3. Postul.
[r] Def. 15.

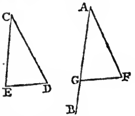



[XXIII.] PROP. XXIII. PROBL.

*Ad datam rectam lineam, et ad datum in eâ punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.*

Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsâ punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utrâque ipsarum C D, C E quævis puncta D, E, ducaturque D E; et ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus C D, D E, E C, triangulum [s] constituatur A F G, ita ut A F sit æqualis C D, et A G ipsi C E, et F G ipsi D E. Itaque quoniam duæ D C, C E duabus F A, A G æquales sunt, altera alteri, et basis D E est æqualis

[s] 22. hujus.

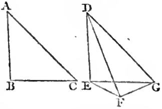


æqualis basi F G; erit et angulus D C E angulo F A G æqualis[t]. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in eâ punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. *Q. E. F.* [t] 8. hujus.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri; videlicet latus quidem A B æquale lateri D E, latus vero A C æquale D F. At angulus B A C angulo E D F sit major. Dico et basim B C basi E F majorem esse.



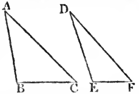

Quoniam enim angulus B A C major est angulo E D F, constituatur[u] ad rectam lineam D E, et ad punctum in[u] eâ D, angulo B A C æqualis angulus E D G, ponaturque alterutri ipsarum A C, D F æqualis[x] D G; et G E, F G[x] jungantur. Itaque quoniam A B quidem est æqualis D E, A C vero ipsi D G; duæ B A, A C, duabus E D, D G æquales sunt, altera alteri; et angulus B A C est æqualis angulo E D G; ergo basis B C basi E G est [y] æqualis. Rursus quoniam æqualis est D G ipsi D F; est angulus D F G angulo D G F [z] æqualis; erit itaque D F G angulus[z] angulo E G F major; multo igitur major est E F G angulus ipso E G F. Et quoniam triangulum est E F G, angulum E F G majorem habens angulo E G F; majori autem angulo latus majus subtenditur[a]; erit et latus[a] E G latere E F majus; sed E G latus est æquale lateri B C. Ergo et B C ipso E F majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt. *Q. E. D.*

[u] 23. hujus.
[x] 3. hujus.
[y] 4. hujus.
[z] 5. hujus.
[a] 19. hujus.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

*Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F. Basis autem B C basi E F sit major. Dico et angulum B A C angulo E D F majorem esse. Si enim non est major,



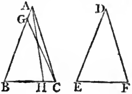

vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F æqualis [b]. Non est autem. Non igitur æqualis est B A C angulus angulo E D F. Sed neque minor; minor enim esset [c] et basis B C basi E F. Atqui non est. Non igitur angulus B A C angulo E D F est minor. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus B A C angulo E D F necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. *Q. E. D.*

[b] 4. hujus.
[c] 24. hujus.

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

*Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis D E F, E F D æquales habeant, alterum alteri; videlicet angulum quidem A B C æqualem angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D. Habeant autem et unum latus




uni

uni lateri æquale, et primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus ſc. A B lateri D E, et latus A C ipſi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt A B ipſi D E, una ipſarum major eſt. Sit major A B, ponaturque G B æqualis D E; et G C jungatur. Quoniam igitur B G quidem eſt æqualis D E, B C vero ipſi E F, duæ G B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri; et angulus G B C æqualis angulo D E F. Baſis igitur G C baſi D F eſt [d] æqualis; [d] 4. hujus. et G B C triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo G C B angulus eſt æqualis angulo D F E; ſed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur; quare et B C G angulus angulo B C A eſt æqualis, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur inæqualis eſt A B ipſi D E: ergo æqualis erit. Eſt autem et B C æqualis E F. Itaque duæ A B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. Baſis igitur A C baſi [d] D F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, æqualia, ut A B ipſi D E. Dico rurſus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; A C quidem ipſi D F, B C vero ipſi E F; et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt B C ipſi E F, una ipſarum major eſt. Sit major B C, ſi fieri poteſt, ponaturque B H æqualis E F, et A H jungatur. Quoniam igitur B H quidem eſt æqualis E F, A B vero ipſi D E; duæ A B, B H duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri, et angulos æquales continent; ergo [d] baſis A H baſi D F eſt æqualis; et A B H triangulum triangulo D E F; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Æqualis igitur eſt angulus B H A angulo E F D. Sed E F D eſt æqualis [e] angulo B C A. Ergo et B H A [e] ex hyp. angulus angulo B C A eſt æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis eſt interiori et oppoſito B C A; quod fieri non poteſt [f]. Quare non in- [f] 16. hujus. æqualis eſt B C ipſi E F; æqualis igitur. Eſt autem et A B æqualis D E. Duæ igitur A B, B C duabus D E, E F æquales ſunt, altera alteri; anguloſque æquales con-

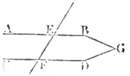
 tinent.

tinent. Quare baſis A C æqualis eſt baſi D F, et B A C triangulum triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

*Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.*

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens alternos angulos A E F, E F D æquales inter ſe faciat. Dico rectam lineam A B ipſi C D parallelam eſſe. Si enim non eſt parallela, productæ A B, C D, vel ad partes B, D convenient, vel ad partes A, C. Producantur, conveniantque ad partes B, D in puncto G. Itaque




g 16. hujus. G E F trianguli exterior angulus A E F major [g] eſt interiore et oppoſito E F G; ſed et æqualis [h]; quod fieri
h ex hyp. non poteſt. Non igitur A B, C D productæ ad partes B, D convenient. Similiter demonſtrabitur neque convenire ad partes A, C. Quæ vero in neutras partes con-
i Def. 35. veniunt, parallelæ [i] inter ſe ſunt. Parallela igitur eſt A B ipſi C D. Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ inter ſe erunt rectæ lineæ. *Q. E. D.*

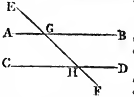
[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

*Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ.*

In duas enim rectas lineas A B, C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, et oppoſito G H D æqualem faciat; vel interiores et ad eaſdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam eſſe. Quoniam enim

E G B

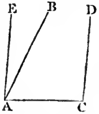
E G B angulus æqualis eſt [k] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [l], erit et angulus A G H angulo G H D æqualis; et ſunt alterni. Parallela igitur eſt A B ipſi C D [m]. Rurſus quoniam anguli B G H, G H D duobus rectis ſunt æquales [n], et ſunt A G H, B G H æquales duobus rectis [o]: erunt anguli A G H, B G H angulis B G H, G H D æquales. Communis auferatur B G H. Reliquus igitur A G H eſt æqualis reliquo G H D; et ſunt alterni. Ergo A B ipſi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. *Q. E. D.*




[k] ex hyp.
[l] 15. hujus.
[m] Ex antecedente.
[n] ex hyp.
[o] 13. hujus.

*Cor.* * Si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores et ex eâdem parte angulos duobus rectis minores fecerit; rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi invicem occurrent ex eâ parte, ex quâ ſunt anguli duobus rectis minores.

Incidat enim in duas rectas lineas A B, C D recta linea A C, ita ut angulos B A C, D C A duobus rectis minores efficiat: dico rectas lineas A B, C D in infinitum productas ex eâ parte, ex quâ angulos cum A C duobus rectis minores efficiunt, ſibi invicem occurſuras eſſe. Rectæ lineæ A C ad punctum A [p] applicetur angulus E A C æqualis angulo, qui anguli D C A ad duos rectos complementum eſt. Itaque anguli E A C, D C A ſimul ſumpti duobus rectis æquales ſunt, et recta linea A E ipſi D C parallela erit, per hanc Prop. Anguli autem B A C, D C A, duobus rectis ex hypotheſi minores, duobus E A C, D C A minores erunt, qui duobus rectis oſtenſi ſunt æquales. Communis auferatur angulus D C A, erit itaque B A C angulus angulo E A C minor. Igitur recta linea A B rectas A E, A C interjacet, angulum E A C dividens; itaque ab A E verſus C D deflectitur; quamobrem producta ipſi C D productæ occurret. Recta enim




[p] 23. hujus.

ea

ea demum eſt linea, quæ producta in eâ perſtat directione, quam primo habuerit. Directiones autem rectarum A B, C D erant, ut oſtenſum eſt, ad ſe invicem. Itaque &c. *Q. E. D.*

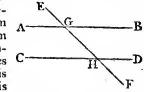
SCHOLION.*

In hoc Corollario verum eſſe illud demonſtravimus, quod in initio libri inter κοινὰς ἐννοίας, ſive Axiomata, poſuit Euclides. Vid. Ax. 12. hujus.

[XXIX.] PROP. XXIX. THEOR.

*In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori et oppoſito et ad eaſdem partes æqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.*

In parallelas enim rectas lineas A B, C D recta linea incidat E F. Dico alternos angulos A G H, G H D inter ſe æquales efficere, et exteriorem E G B interiori, et ad eaſdem partes G H D æqualem: et interiores et ad eaſdem partes B G H, G H D duobus rectis æquales. Si enim inæqualis




eſt A G H ipſi G H D, unus ipſorum major eſt. Sit major A G H. Et quoniam A G H angulus major eſt angulo G H D; communis apponatur B G H. Anguli igitur A G H, B G H angulis B G H, G H D majores ſunt. Sed
[r] 13. hujus. anguli A G H, B G H ſunt æquales duobus rectis[r]. Ergo B G H, G H D anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero a minoribus, quam ſint duo recti, in infinitum
[s] Ax. 12. producuntur rectæ lineæ, inter ſe conveniunt[s]. Ergo rectæ lineæ A B, C D in infinitum productæ convenient inter ſe. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis eſt A G H angulus angulo G H D; quare neceſſario eſt æqualis. Angulus autem
[t] 15. hujus. A G H æqualis eſt angulo E G B[t]. Ergo et E G B ipſi G H D æqualis erit. Communis apponatur B G H. Anguli igitur E G B, B G H ſunt æquales angulis B G H, G H D; ſed E G B, B G H æquales ſunt duobus rectis. Ergo et B G H, G H D duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorem interiori

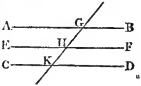
et

et oppofito et ad eafdem partes æqualem, et interiores et ad eafdem partes duobus rectis æquales efficiet.
*Q. E. D.*

PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

*Quæ eidem rectæ lineæ funt parallelæ, et inter fe parallelæ erunt.*

Sit utraque ipfarum A B, C D ipfi E F parallela. Dico et A B ipfi C D parallelam effe. Incidat enim in ipfas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B, E F recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F eft æqualis [u]. Rurfus quoniam in parallelas rectas lineas E F, C D recta linea incidit G K, æqualis eft G H F angulus angulo G K D [u]. Oftenfus autem eft et angulus A G K angulo G H F æqualis; ergo et A G K ipfi G K D æqualis erit; et funt alterni. Parallela igitur eft A B ipfi C D [x]. Ergo quæ eidem rectæ lineæ funt parallelæ, et inter fe parallelæ erunt. *Q. E. D.*



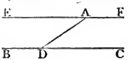

[u] 29. hujus.

[x] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

*Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.*

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. Oportet per A punctum ipfi B C rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in B C quodvis punctum D, et jungatur A D; conftituaturque [y] ad rectam lineam D A, et ad punctum in ipfa A, angulo A D C æqualis angulus D A E; et in directum ipfi E A recta linea A F producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas B C, E F recta linea A D incidens alternos angulos E A D, A D C inter fe æquales efficit, E F ipfi B C parallela erit [z]. Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C parallela ducta eft recta linea E A F. *Q. E. F.*



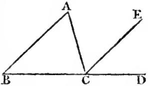

[y] 23. hujus.

[z] 27. hujus.

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

*Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis, et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.*

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse æquales.




[a] 31. hujus. Ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE; et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni
[b] 29. hujus. anguli BAC, ACE inter se æquales sunt [b]. Rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est æqualis [b]. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC, ABC. Communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BAC, ACB æquales sunt; sed anguli ACD,
[c] 13. hujus. ACB sunt æquales [c] duobus rectis. Ergo et ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. *Q. E. D.*

*Cor.* 1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

*Cor.* 2. Si in uno triangulo duo anguli, aut singuli, aut simul, æquales sint duobus angulis alterius trianguli; erit reliquus angulus reliquo æqualis.

*Cor.* 3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.

*Cor.* 4. In triangulo isosceles si angulus æquis cruribus contentus rectus sit, reliqui ad basim sunt semirecti.

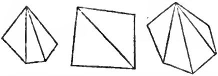
*Cor.* 5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEO-

## THEOREMA I.

*Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.*

*Nam figura unaquæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera,* e. g. *si quatuor latera habeat, resolvitur in duo triangula;*



*si quinque in tria triangula; si sex in quatuor et sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est, bis tot rectis, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.*

Q. E. D.

## THEOR. II.

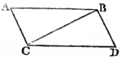
*Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.*

*Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ; quare exteriores conficiunt quatuor rectos.* Q. E. D.

## PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

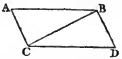
*Quæ æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.*

Sint æquales et parallelæ A B, C D; et ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ A C, B D. Dico A C, B D æquales, et parallelas esse. Ducatur enim B C; et quoniam A B parallela est C D, in ipsasque incidit B C, alterni anguli A B C, B C D æquales sunt [d]. [d 29. hujus.]




Rursus

Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus B C, C D sunt æquales; et angulus A B C æqualis angulo B C D. Basis igitur A C basi B D est æqualis [e]; triangulumque A B C triangulo BCD; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C, B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B, C B D æquales inter se efficit, parallela est A C ipsi B D [f]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Quæ igitur æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. *Q. E. D.*



[e] 4. hujus.

[f] 27. hujus.

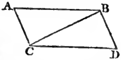
DEFINITIO.

Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. THEOR.

*Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.*

Sit parallelogrammum A B D C, cujus diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos, inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C, B C D inter se æquales sunt [g]. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C, alterni anguli A C B, C B D æquales sunt inter se [g]. Duo igitur triangula sunt A B C, C B D, quæ duos angulos A B C, B C A duobus angulis B C D, C B D æquales habent, alterum alteri; et unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos, utrique commune, B C. Ergo [h] et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Æquale igitur est latus quidem A B lateri C D, latus vero A C ipsi B D, et angulus B A C angulo B D C æqualis. Et quoniam



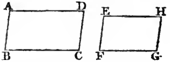
[g] 29. hujus.

[h] 26. hujus.

quoniam angulus A B C est æqualis angulo B C D, et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. Ostensus autem est et angulus B A C angulo B D C æqualis. Parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est A B ipsi C D, communis autem B C, duæ A B, B C duabus D C, C B æquales sunt, altera alteri; et angulus A B C æqualis est angulo B C D. Basis igitur [l] A C basi D B æqualis; et triangulum A B C triangulo B C D æquale. Ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam secat. *Q. E. D.* [l] 4. hujus.

*Cor.* * Parallelogramma, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, et reliquos reliquis, singulos singulis, æquales habent.

Parallelogramma A B C D, E F G H angulos ad A, E æquales habeant. Dico parallelogrammum A B C D reliquos sui angulos reliquis parallelogrammi E F G H, singulos singulis, æquales habere.




Nam in parallelogrammo A B C D anguli duo A, B simul sumpti duobus rectis æquales sunt [k]. Pari ratione in parallelogrammo E F G H, duo E, F simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duo igitur A, B simul duobus E, F simul sunt æquales. Ablatisque æqualibus A, E, reliquus B reliquo F æqualis [l] erit. Jam vero in parallelogrammo A B C D anguli A, C oppositi inter se æquales sunt, per hanc Prop. et in parallelogrammo E F G H oppositi E, G inter se æquales. Æquales autem A, E [m]. Quare et C, G æquales sunt [n]. Pari ratione angulus D, cui oppositus est B, in parallelogrammo A B C D, æqualis ostendetur angulo H, cui in parallelogrammo E F G H oppositus est F, ipsius B æqualis.

[k] 29. hujus.
[l] Ax. 3.
[m] ex hyp.
[n] Ax. 1.

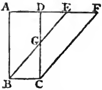
PROP.

[XXXV.]

## PROP. XXXV. THEOR.

*Parallelogramma super eâdem basi, et in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.*

Sint parallelogramma A B C D, E B C F super eâdem basi B C, et in eisdem parallelis A F, B C constituta. Dico A B C D parallelogrammum parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D,




o 34. hujus. æqualis o est A D ipsi B C. Eâdem quoque ratione, et E F est æqualis B C. Quare et A D ipsi E F

p Ax. 1. æqualis erit p; et communis D E.

q Ax. 2. Tota igitur A E q toti D F est æqualis. Est autem et A B æqualis D C. Ergo duæ E A, A B duabus F D, D C æquales sunt, altera alteri, et angulus F D C æqualis

r 29. hujus. angulo E A B, exterior interiori r; basis igitur E B basi

s 4. hujus. F C est s æqualis, et E A B triangulum æquale triangulo F D C. Commune auferatur D G E. Reliquum igitur

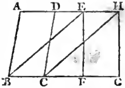
t Ax. 3. trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est æquale t. Commune apponatur G B C triangulum. Ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F æquale erit. Parallelogramma igitur super eâdem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. *Q. E. D.*

[XXXVI.]

## PROP. XXXVI. THEOR.

*Parallelogramma super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.*

Sint parallelogramma A B C D, E F G H super æqualibus basibus B C, F G, et in eisdem parallelis A H, B G constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale esse. Conjungantur enim B E,




u Hyp. C H. Et quoniam æqualis u est B C ipsi F G, et F G æqualis ipsi E H; erit et B C ipsi E H æqualis. Sunt parallelæ, et ipsas conjungunt B E, C H. Quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes

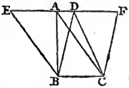
x 33. hujus. conjungunt, æquales et parallelæ sunt x. Ergo E B, C H et æquales sunt, et parallelæ. Quare E B C H paral-

parallelogrammum eſt, et æquale parallelogrammo A B C D [y]; baſim enim eandem habet B C, et in eiſdem parallelis B C, A D conſtituitur. Simili ratione, et E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H eſt æquale. Baſim enim eandem habet E H, et in eiſdem parallelis E H, B G conſtituitur. Ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.* [y] 35. hujus.

## PROP. XXXVII. THEOR. [XXXVII.]

*Triangula ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.*

Sint triangula A B C, D B C ſuper eâdem baſi B C, et in eiſdem parallelis A D, B C conſtituta. Dico A B C triangulum triangulo D B C æquale eſſe. Producatur A D ex utrâque parte in E, F puncta; et per B quidem ipſi C A parallela ducatur B E, [a] per C vero ipſi B D parallela C F. Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum E B C A, D B C F; et parallelogrammum E B C A eſt æquale [a] parallelogrammo D B C F; etenim ſuper eâdem ſunt baſi B C, et in eiſdem parallelis B C, E F. Eſtque parallelogrammi quidem E B C A dimidium [b] A B C triangulum, cum diameter A B ipſum bifariam ſecet: parallelogrammi vero D B C F dimidium [b] triangulum D B C; diameter enim D C ipſum bifariam ſecat. Quæ autem [c] æqualium dimidia ſunt, inter ſe æqualia ſunt. Ergo triangulum A B C triangulo D B C eſt æquale. Triangula igitur ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.*



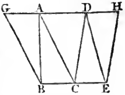

[a] 31. hujus.
[a] 35. hujus.
[b] 34. hujus.
[c] Ax. 7.

## PROP. XXXVIII. THEOR. [XXXVIII.]

*Triangula ſuper baſibus æqualibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.*

Sint triangula A B C, D C E ſuper æqualibus baſibus B C, C E, et in eiſdem parallelis B E, A D conſtituta. Dico A B C triangulum D C E triangulo æquale eſſe. Producatur enim A D ex utrâque parte in G, H puncta: et per B quidem ipſi C A parallela ducatur B G [d], per E [d] 31. hujus.

[e 31. hujus.] vero ducatur E H parallela ipsi D C[e]. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum G B C A, D C E H. Atque est parallelogrammum G B C A æquale[f] parallelogrammo D C E H; in æqualibus enim sunt basibus B C, C E, et in eisdem B E, G H parallelis. Parallelogrammi vero G B C A dimidium[g] est A B C triangulum, nam diameter A B ipsum bifariam secat: et parallelogrammi D C E H dimidium[g] est triangulum D C E, diameter enim D E ipsum secat bifariam. Quæ autem æqualium dimidia sunt[h], inter se æqualia sunt. Ergo A B C triangulum triangulo D C E est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

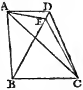



[f 36. hujus.] [g 34. hujus.] [h Ax. 7.]

[XXXIX] PROP. XXXIX. THEOR.

*Triangula æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.*

Sint æqualia triangula A B C, D B C super eâdem basi B C constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Ducatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur[i] per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C ducatur. Æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C[k], super eâdem enim est basi B C, et in eisdem B C, A E parallelis. Sed A B C triangulum triangulo D B C[l] est æquale. Ergo et triangulum D B C æquale est ipsi E B C triangulo, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam per A ipsi B C parallelam esse, præter ipsam A D. Ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia super eâdem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis. *Q. E. D.*



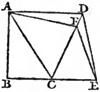

[i 31. hujus.] [k 37. hujus.] [l ex hyp.]

PROP.

## PROP. XL. THEOR. [XL.]

*Triangula æqualia super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.*

Sint æqualia triangula A B C, C D E super æqualibus basibus B C, C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Ducatur enim A D. Dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur[m] per A ipsi B E parallela A F, et F E ducatur. Triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale[n], cum super æqualibus basibus et in eisdem parallelis B E, A F constituantur. Sed triangulum A B C æquale est triangulo D C E. Ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, majus minori; quod fieri non potest. Non igitur A F ipsi B E est parallela. Similiter demonstrabimus neque aliam quampiam per A ipsi B E parallelam esse, præter A D. Ergo A D ipsi B E parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. *Q. E. D.*



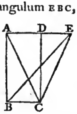

m 31. hujus.

n 38. hujus.

## PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

*Si parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.*

Parallelogrammum enim A B C D, et triangulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C, A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. Jungatur enim A C. Triangulum igitur A B C triangulo E B C est æquale[o]; namque super eadem basi B C et in eisdem B C, A E parallelis constituntur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C[p], cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, et in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. *Q. E. D.*



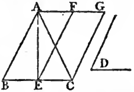

o 37. hujus.

p 34. hujus.

[XLII.] PROP. XLII. PROBL.

*Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.*

Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet dato triangulo A B C æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D

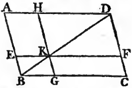



q 10. hujus. æquali. Secetur B C bifariam q in E; et junctâ A E, ad rectam lineam E C, atque ad punctum
r 23. hujus. in eâ E, constituatur angulus r C E F æqualis ipsi D; et per A quidem ipsi E C parallela
s 31. hujus. ducatur s A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G s. Parallelogrammum igitur est F E C G. Et quoniam B E
t 38. hujus. est æqualis E C, erit et A B E triangulum t triangulo A E C æquale, super æqualibus enim sunt basibus B E, E C, et in eisdem B C, A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. Est autem et paralle-
u 41. hujus. logrammum F E C G duplum u trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. Æquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetque C E F angulum] æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. *Q. E. F.*

[XLIII.] PROP. XLIII. THEOR.

*Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.*

Sit parallelogrammum A B C D, cujus diameter B D; et circa ipsam B D parallelogramma quidem sint F H, E G; quæ vero complementa dicuntur A K, K C. Dico A K complementum complemento K C æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est



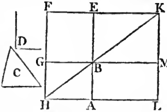

x 34. hujus. A B C D, et ejus diameter B D, æquale x est A B D triangulum triangulo B D C. Rursus quoniam H K F D parallelogrammum est, cujus diameter D K, triangulum H D K

H D K triangulo D F K æquale [y] erit. Eâdem ratione, et triangulum K G B triangulo K E B eſt æquale. Cum igitur triangulum quidem B E K æquale ſit triangulo B G K, triangulum vero H D K ipſi D F K; erit triangulum B E K una cum triangulo H D K æquale triangulo B G K una cum D F K triangulo. Eſt autem et totum triangulum A B D æquale toti B D C. Reliquum igitur A K complementum reliquo complemento K C eſt æquale. Ergo omnis parallelogrammi ſpatii eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe æqualia ſunt. *Q. E. D.* [y] 34. hujus.

## PROP. XLIV. PROBL. [XLIV.]

*Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.*

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. Oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æquali. Conſtituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui eſt æqualis D; et ponatur B E in directum ipſi A B, producaturque F G ad H; et per A alterutri ipſarum B G, E F parallela [a] ducatur A H, et H B jungatur. Quoniam igitur in parallelas A H, E F recta linea H F incidit, anguli A H F, H F E duobus rectis æquales [b] ſunt. Quare B H F, H F E duobus rectis ſunt minores. Quæ vero a minoribus, quam ſunt duo recti, ſi in infinitum producantur, convenient [c] inter ſe. Ergo H B, F E productæ convenient. Producantur, et conveniant in K; perque K alterutri ipſarum E A, F H parallela [a] ducatur K L; et A H, G B ad L, M puncta producantur. Parallelogrammum igitur eſt H L K F, cujus diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem ſunt A G, M E; ea vero, quæ complementa dicuntur, L B, B F; ergo L B ipſi B F eſt [d] æquale. Sed et B F æquale eſt triangulo C. Quare et L B triangulo C æquale erit. Et quoniam G B E angulus æqualis [e] eſt angulo A B M, ſed et



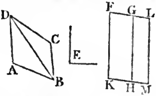

[a] 42. hujus.
[a] 31. hujus.
[b] 29. hujus.
[c] Ax. 12.
[d] 43. hujus.
[e] 15. hujus.

et æqualis angulo D, erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. *Q. E. F.*

[XLV.] PROP. XLV. PROBL.

*Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.*

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus rectilineus E. Oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur D B, et constituatur tri-




[f] 42. hujus. angulo A D B æquale [f] parallelogrammum F H in angulo H K F, qui est æqualis angulo E. Deinde ad rectam lineam G H applicetur triangulo D B C æquale

[g] 44. hujus. [g] parallelogrammum G M, in angulo G H M, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum H K F, G H M, erit et H K F angulo G H M æqualis. Communis apponatur K H G; anguli igitur H K F, K H G angulis K H G, G H M æquales sunt. Sed

[h] 29. hujus. H K F, K H G sunt æquales [h] duobus rectis. Ergo, et K H G, G H M duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam G H, et ad datum in eâ punctum H, duæ rectæ lineæ K H, H M non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt;

[i] 14. hujus. in directum igitur [i] est K H ipsi H M. Et quoniam in parallelas K M, F G recta linea H G incidit, alterni anguli M H G, H G F æquales [h] sunt. Communis apponatur H G L; anguli igitur M H G, H G L angulis H G F, H G L sunt æquales. At anguli M H G, H G L æquales [h] sunt duobus rectis. Quare et anguli H G F, H G L duobus rectis æquales erunt. In directum [i] igitur est F G ipsi G L. Et quoniam K F ipsi H G et æqualis est et

[k] 30. hujus. parallela; sed et H G ipsi M L; erit K F [k] ipsi M L et æqualis et parallela. Ipsasque conjungunt rectæ lineæ

[l] 33. hujus. K M, F L; ergo et K M, F L æquales [l] et parallelæ sunt. Parallelogrammum igitur est K F L M. At cum triangulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo H F; triangulum vero D B C parallelogrammo G M, erit totum

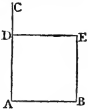
A B C D

A B C D rectilineum toti parallelogrammo K F L M æquale. Dato igitur rectilineo A B C D æquale parallelogrammum constitutum est K F L M, in angulo F K M, qui est æqualis angulo E dato. *Q. E. F.*

*Cor.* Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

## PROP. XLVI. PROBL. [XLVI.]

*Super datâ rectâ lineâ quadratum describere.*



Sit data recta linea A B. Oportet super ipsâ A B quadratum describere. Ducatur [m] rectæ lineæ A B a puncto in eâ dato A ad rectos angulos A C; et ipsi A B æqualis [n] ponatur A D; perque punctum D ducatur [o] D E ipsi A B parallela, et per B ipsi A D parallela [o] ducatur B E. Parallelogrammum igitur est A D E B. Et A B quidem est [p] æqualis D E, A D vero ipsi [p] B E; sed B A ipsi A D est æqualis. Quatuor igitur B A, A D, D E, E B inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est A D E B parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas A B, D E recta linea incidit A D, anguli B A D, A D E duobus rectis sunt [q] æquales. Rectus autem est B A D, ergo et A D E rectus erit. Parallelogrammorum vero spatiorum quæ ex opposito sunt latera, et anguli, [p] inter se æqualia sunt. Rectus igitur est uterque oppositorum A B E, B E D angulorum; et ob id rectangulum est A D B E. Ostensum autem est æquilaterum esse. [r] Quadratum igitur sit necesse est, atque est super rectâ lineâ A B descriptum. *Q. E. F.*

[m] 11. hujus.
[n] 3. hujus.
[o] 31. hujus.
[p] 34. hujus.
[q] 29. hujus.
[r] Def. 30.

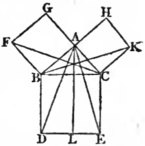
*Cor.* Hinc omne parallelogrammum, habens unum angulum rectum, est rectangulum.

## PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

*In rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.*

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum a rectâ

B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A, A C describuntur. Describatur [s] enim a B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis B A, A C quadrata [s] G B, H C; perque A alterutri ipsarum B D, C E parallela ducatur A L; et A D, F C jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum B A C, B A G rectus [t] est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A, duæ rectæ lineæ A C, A G non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales efficiunt. In directum igitur [u] est C A ipsi A G. Eadem ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est æqualis angulo F B A, rectus enim uterque est, communis apponatur A B C; totus igitur D B A angulus toti F B C est [x] æqualis. Quod cum duæ A B, B D duabus F B, B C æquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit et basis A D basi F C æqualis [y], et A B D triangulum triangulo F B C æquale. Estque [z] trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum, basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D, A L sunt parallelis: trianguli [z] vero F B C duplum est G B quadratum; rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B, G C. Quæ autem æqualium duplicia, inter se æqualia [a] sunt. Ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter junctis A E, B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. Totum igitur B D E C quadratum duobus quadratis G B, H C est æquale. Et describitur quidem B D E C quadratum a recta linea B C; quadrata vero G B, H C ab ipsis B A, A C. Quadratum igitur B E, a latere B C descriptum, æquale est quadratis, quæ describuntur a lateribus B A, A C. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur a latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur. *Q. E. D.*



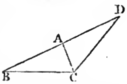

[s] 46. hujus.
[t] Def. 30.
[u] 14. hujus.
[x] Ax. 2.
[y] 4. hujus.
[z] 41. hujus.
[a] Ax. 6.

PROP.

## PROP. XLVIII. THEOR. [XLVIII.]

*Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.*

Si trianguli A B C, quod ab uno latere B C describitur quadratum, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus B A, A C describuntur, dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim a puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturque A D ipsi B A æqualis; et D C jungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato ex A B. Commune apponatur quadratum, quod ex A C. Ergo quadrata, quæ ex D A, A C, æqualia sunt quadratis, quæ ex B A, A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A, A C, æquale [b] est quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est [b] D A C: quadratis vero, quæ ex B A, A C, æquale ponitur quadratum, quod ex B C. Quadratum igitur, quod ex D C, æquale est ei, quod ex B C, quadrato. Ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A, A C æquales sunt duabus B A, A C; et basis D C est æqualis basi C B. Angulus [c] igitur D A C angulo B A C est æqualis. Rectus autem est D A C. Ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. *Q. E. D.*




[b] 47. hujus.
[c] 8. hujus.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER SECUNDUS.

### DEFINITIONES.

#### Definitio I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

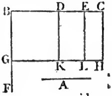
II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

### PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

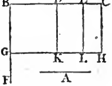
*Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, ſub duabus rectis lineis contentum, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub rectâ lineâ inſectâ, et ſingulis partibus continentur.*

Sint duæ rectæ lineæ A, B C; et ſecta ſit B C utcunque in punctis D, E. Dico rectangulum, rectis lineis A, B C contentum, æquale eſſe rectangulis, quæ ſub A et B D, ſub A et D E, ſub A et E C continentur, ſimul ſumptis. Ducatur enim a puncto B, ipſi B C ad rectos [a] angulos B F; atque ipſi A ponatur [b] æqualis B G; et per G quidem




[a] 11. primi.
[b] 3. primi.

[c 31. primi.] quidem ipsi B C parallela [c] ducatur G H; per D, E, C vero ducantur D K, E L, C H parallelæ [c] ipsi B G. Rectangulum igitur B H est æquale rectangulis B K, D L, E H simul sumptis. Atque est B H quidem, quod sub A et B C continetur, etenim continetur sub G B, B C; et B G ipsi A est æqualis. Rectangulum autem B K est quod continetur sub ipsis A et B D; continetur enim sub G B, B D, quarum G B est æqualis A. Et rectangulum D L est, quod continetur sub A et D E, quoniam D K, hoc est B G, ipsi A est æqualis; et similiter rectangulum E H est, quod sub A et E C continetur. Ergo rectangulum contentum sub A et B C est æquale rectangulis sub A et D B, sub A et D E, et sub A et E C simul sumptis. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum, sub duabus rectis lineis contentum, est æquale eis, quæ sub rectâ lineâ insectâ, et singulis partibus continentur. *Q. E. D.*

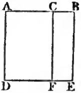



[II.] PROP. II. THEOR.

*Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula, quæ sub totâ, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, quadrato.*

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. Dico rectangulum, quod sub A B, B C continetur, una cum contento sub A B, A C, æquale esse quadrato, quod fit ex A B. Describatur [d] enim ex A B quadratum A D E B, et per C ducatur [e] alterutri ipsarum A D, B E parallela C F. Æquale igitur est A E rectangulis A F, C E. Atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum contentum sub B A, A C, etenim sub D A, A C continetur, quarum A D ipsi A B est æqualis; et rectangulum C E continetur sub A B, B C, cum B E sit æqualis A B. Ergo rectangulum sub A B et A C una cum rectangulo sub A B et B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangula, quæ sub totâ, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod a totâ fit, quadrato. *Q. E. D.*

[d 46. primi.]
[e 31. primi.]

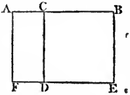



PROP.

## PROP. III. THEOR. [III.]

*Si recta linea utcunque ſecta fuerit; rectangulum ſub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale eſt et rectangulo, quod ſub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte ſit quadrato.*

Recta enim linea A B ſecta ſit uteunque in puncto C. Dico ſub A B et B C rectangulum æquale eſſe rectangulo ſub A C, B C una cum quadrato, quod ſit ex B C. Deſcribatur [f] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: et per A alterutri ipſarum C D, B E parallela [g] ducatur A F. Æquale utique erit rectangulum A E ipſis A D, C E; et eſt A E quidem rectangulum contentum ſub A B, B C; etenim ſub A B, B E continetur, quarum B E eſt æqualis B C: rectangulum vero A D eſt, quod continètur ſub A C, C B, cum D C ipſi C B ſit æqualis: et D B eſt quadratum, quod ſit ex B C. Ergo rectangulum ſub A B, B C eſt æquale rectangulo ſub A C, C B una eum quadrato, quod ex B C. Si igitur recta linea uteunque ſecta fuerit; rectangulum ſub totâ, et unâ ejus parte contentum æquale eſt rectangulo, quod ſub partibus continetur, et ei quod a prædictâ parte ſit quadrato. *Q. E. D.*

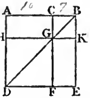



[f] 46. primi.
[g] 31. primi.

## PROP. IV. THEOR. [IV.]

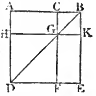
*Si recta linea ſecta fuerit utcunque; quadratum, quod ſit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus ſiunt, et ei quod bis ſub partibus continetur rectangulo.*

Recta enim linea A B ſecta ſit uteunque in C. Dico quadratum, quod ſit ex A B, æquale eſſe et quadratis ex A C, C B, et ei rectangulo, quod bis ſub A C, C B continetur. Deſcribatur [h] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, et per C quidem alterutri ipſarum A D, B E parallela [i] ducatur C G F; per G vero alterutri ipſarum A B, D E ducatur [i] parallela H K. Et quoniam C F eſt parallela ipſi A D, et in ipſas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori




[h] 46. primi.
[i] 31. primi.

[k] 29. primi. interiori et oppoſito A D B æqualis [k]: angulus autem [l] 5. primi. A D B eſt æqualis [l] angulo A B D, quod et latus B A æquale eſt lateri A D. Quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis: ac propterea latus B C lateri [m] 6. primi. C G æquale [m]. Sed et latus C B æ- [n] 34. primi. quale [n] eſt lateri G K, et C G ipſi B K; ergo et G K eſt æquale K B; et C G K B æquilaterum eſt. Dico inſuper etiam rectangulum eſſe. Sed et rectangulum. Angulus enim K B C rectus eſt. Parallelogrammum autem, habens [o] Cor. 46. primi. unum angulum rectum, eſt rectangulum [o]. Rectangulum igitur eſt C G K B; ſed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe; quadratum igitur eſt C G K B, quod quidem fit ex B C. Eâdem ratione et H F eſt quadratum, quod fit ex H G, hoc eſt, ex A C. Ergo H F, C K ex ipſis A C, C B [p] 43. primi. quadrata ſunt. Et quoniam rectangulum A G eſt æquale [p] rectangulo G E; atque eſt A G, quod ſub A C, C B continetur, eſt enim G C ipſi C B æqualis; erit et G E æquale ei, quod continetur ſub A C, C B; quare rectangula A G, G E æqualia ſunt ei, quod bis ſub A C, C B continetur. Sunt autem et H F, C K quadrata ex A C, C B. Quatuor igitur H F, C K, A G, G E, et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis ſub A C, C B continetur rectangulo, ſunt æqualia; ſed H F, C K, A G, G E componunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B. Quadratum igitur ex A B æquale eſt et quadratis ex A C, C B, et ei quod bis ſub A C, C B continetur rectangulo. Quare ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quadratum, quod fit a totâ, æquale erit et quadratis, quæ a partibus fiunt, et ei rectangulo, quod bis ſub partibus continetur. *Q. E. D.*



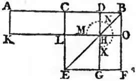

*Cor.* Ex hoc perſpicue conſtat in quadratis ſpatiis parallelogrammis, quæ ſunt circa diametrum, quadrata eſſe.

PROP.

## PROP. V. THEOR. [V.]

*Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato.*

Recta enim linea quævis A B secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum sub A D, B D, una cum quadrato, quod fit ex C D, æquale esse ei quod ex C B fit quadrato. Describatur [q] enim ex B C quadratum C E F B: ducaturque




[q] 46. primi.

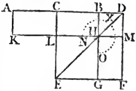
B E; et per D quidem alterutri ipsarum C E, B F parallela [r] ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela [r] alterutri ipsarum C B, E F; et rursus per A ducatur alterutri C L, B O parallela [r] A K. Et quoniam C H complementum æquale [s] est complemento H F, commune apponatur D O; totum igitur C O toti D F est æquale. Sed C O est æquale [t] A L, quoniam et A C ipsi [t] C B; ergo et A L æquale est D F. Commune apponatur C H. Totum igitur A H ipsis F D, D L æquale erit. Sed A H quidem est, quod sub A D, D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis [u]; F D, D L vero est gnomon M N X. Igitur M N X æqualis est ei, quod sub A D, D B continetur; commune apponatur L G, æquale [u] scilicet quadrato, quod ex C D. Ergo M N X gnomon, et L G, æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub A D, D B, et ei, quod fit ex C D, quadrato. Sed M N X gnomon, et L G, sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato, quod ex C D, æquale est ei quod ex C B fit quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidiâ fit quadrato. *Q. E. D.*

[r] 31. primi.
[s] 43. primi.
[t] 36. primi.
[u] Cor. 4. hujus.

PROP.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur.*




Recta enim linea quævis A B secetur bifariam in puncto C, et adjiciatur ipsi in directum B D. Dico rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale esse ei quod fit ex C D quadrato.

[v] 46. primi. Describatur [v] enim ex C D quadratum C E F D, et jungatur D E; per B alterutri ipsarum

[x] 31. primi. C E, D F parallela [x] ducatur B H G; et per H ducatur K L M parallela [x] alterutri ipsarum A D, E F; et adhuc per A alterutri C L, D M parallela [x] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit et rectangulum A L rectangulo C H æquale [y]; sed C H æquale [z] est H F: ergo et A L ipsi H F æquale erit. Commune apponatur C M. Totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. Atque est A M, quod sub A D, D B continetur, etenim D M est [a] æqualis D B. Ergo et gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D, D B. Rursus commune apponatur L G, æquale [a] scilicet quadrato, quod ex C B. Rectangulum igitur sub A D, D B una cum quadrato, quod ex B C, æquale est gnomoni N X O et ipsi L G. Sed gnomon N X O, et L G componunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. Ergo rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex B C, æquale est ei quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub totâ cum adjectâ, et adjectâ contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

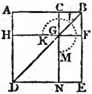
[y] 36. primi.
[z] 43. primi.
[a] Cor. 4. hujus.

PROP.

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ, et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt et rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato.*

Recta enim linea quædam A B secta fit utcunque in puncto C. Dico quadrata ex A B, B C æqualia esse et rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, et ei, quod fit ex A C, quadrato. Describatur[b] enim ex A B quadratum A D E B, et figura construatur *. Itaque quoniam A G rectangulum æquale [c] est rectangulo G E, commune apponatur C F; quare totum A F toti C E est æquale. Rectangula igitur A F, C E dupla sunt rectanguli A F. Sed A F, C E sunt K L M gnomon, et quadratum C F; ergo K L M gnomon, et quadratum C F, dupla erunt rectanguli A F. Est autem id, quod bis sub A B, B C continetur, duplum ipsius A F; etenim B F est [d] æqualis B C. Gnomon igitur K L M, et quadratum C F, æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur. Commune apponatur H N, quod est ex A C quadratum. Ergo gnomon K L M, et quadrata C F, H N æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur, et quadrato ex A C. Sed gnomon K L M, et quadrata C F, H N componunt A D E B, et C F, quæ sunt ex A B, B C quadrata. Quadrata igitur ex A B, B C æqualia sunt rectangulo, quod bis sub A B, B C continetur, una cum eo, quod fit ex A C, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ a totâ et unâ parte fiunt, utraque quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis sub totâ ac dictâ parte continetur, et ei quod a reliquâ parte fit quadrato. *Q. E. D.*




[b] 46. primi.

[c] 43. primi.

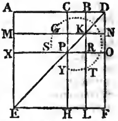
[d] Cor. 4. hujus.

* *Figura dicitur construi, cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, et duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi, cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, et quatuor complementa.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

*Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, describitur.*

Recta enim linea A B secta sit uteunque in C. Dico rectangulum quater sub A B, B C contentum, una cum quadrato, quod ex A C, æquale esse quadrato, quod ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, describitur. Producatur enim recta linea A B in D; et ipsi C B ponatur æqualis B D; describaturque ex A D quadratum A E F D; et dupla figura construatur. Quoniam igitur C B



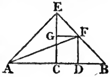

[e] hyp. [f] 34. primi. est [e] æqualis B D, atque est C B ipsi G K æqualis [f]; B D vero ipsi K N: erit et G K æqualis K N. Eâdem ratione, et P R ipsi R O est æqualis. Et quoniam C B est æqualis [g] 36. primi. B D, et G K ipsi K N; erit rectangulum [g] quidem C K rectangulo B N; rectangulum vero G R ipsi R N æquale [g]. [h] 43. primi. Sed C K est [h] æquale R N, complementa enim sunt parallelogrammi C O; ergo et B N æquale est G R, et quatuor rectangula B N, K C, G R, R N inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli C K. Rursus quoniam C B est æqualis B D, et B D quidem ipsi B K, hoc est, ipsi C G æqualis; C B vero ipsi G K, hoc est, G P: erit et C G æqualis G P. Est autem et P R ipsi R O æqualis, rectangulum igitur A G rectangulo M P, et rectangulum P L ipsi R F æquale erit. Sed M P est æquale P L; complementa enim sunt M L parallelogrammi; quare et A G ipsi R F est æquale. Quatuor igitur A G, M P, P L, R F inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius A G quadrupla. Ostensum autem est et quatuor C K, B N, G R, R N quadrupla esse C K. Quare octo continentia gnomonem S T Y ipsius A K quadrupla sunt. Et quoniam A K est, quod sub A B, B C continetur; etenim B K est æqualis B C; erit contentum quater sub A B, B C ipsius A K quadruplum. At demonstratus est gnomon S T Y quadruplus ipsius A K; quod igitur quater sub A B, B C continetur, æquale est gnomoni S T Y. Commune apponatur X H, quod quidem quadrato ex [i] Cor. 4. hujus. A C est [i] æquale. Ergo quod quater sub A B, B C continetur

tinetur, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ipſi S T Y gnomoni, et quadrato X H. Sed S T Y gnomon, et X H, totum ſunt A E F D quadratum, quod deſcribitur ex A D. Rectangulum igitur quater ſub A B, B C contentum, una cum quadrato ex A C, æquale eſt ei, quod ex A D, hoc eſt ex A B, B C, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea utcunque ſecta fuerit; quod quater ſub totâ, et unâ parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato, quod ex totâ et dictâ parte, tanquam ex unâ lineâ, deſcribitur. *Q. E. D.*

## PROP. IX. THEOR. [IX.]

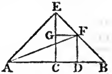
*Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales ſecta fuerit; quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur.*

Recta enim linea quævis A B ſecta ſit in partes æquales ad C, et in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla eſſe. Ducatur [l]enim a puncto C ipſi A B ad rectos angulos C E, et utrivis ipſarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque E A, E B. [l] 11. primi.




Ac per D quidem ipſi C E parallela [m] ducatur D F; per [m] 31. primi.
F vero ipſi A B parallela [m] F G; et A F ducatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis C E; erit [n] et angulus E A C [n] 5. primi.
angulo A E C æqualis. Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui A E C, E A C uni recto æquales [o] erunt; et [o] 3. Cor. 32. primi.
ſunt æquales inter ſeſe; utervis igitur ipſorum A E C, E A C recti eſt dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium eſt utervis ipſorum C E B, E B C. Quapropter et illi inter ſe ſunt æquales, et totus angulus A E B rectus eſt. Jam vero, cum in rectas parallelas, G F, C B recta E B incidat; angulus exterior E F G interiori F B D æqualis erit [p], cui etiam F E G æqualis. Anguli igitur [p] 29. primi.
E F G, F E G inter ſe æquales ſunt [q], ac proinde in triangulo G E F latera G E, G F inter ſe ſunt æqualia [r]. Pari ratione cum in rectas parallelas D F, C E recta B E incidat; angulus exterior B F D interiori B E C æqualis erit, cui etiam angulus F B D æqualis eſt. Anguli igitur B F D, F B D ſunt inter ſe æquales, ac proinde in triangulo D F B latera D F, D B ſunt inter ſe æ- [q] Ax. 1. [r] 6. primi.

qualia. Et quoniam A C eſt æqualis C E, erit et ex A C quadratum æquale quadrato ex C E. Quadrata igitur ex A C, C E dupla ſunt quadrati ex A C; quadratis autem ex
[a] 47. primi. A C, C E æquale [a] eſt quadratum ex E A, ſiquidem rectus eſt angulus A C E. Ergo quadratum ex E A quadrati ex A C eſt duplum. Rurſus quoniam E G æqualis eſt G F,

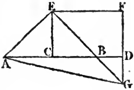



et quadratum ex E G quadrato ex G F eſt æquale. Quadrata igitur ex E G et G F dupla ſunt quadrati ex G F; at quadratis ex E G, G F æquale [a] eſt quod ex E F quadratum. Ergo quadratum ex E F quadrati ex G F du-
[b] 34. primi. plum erit. Æqualis [b] autem eſt G F ipſi C D; quadratum igitur ex E F duplum eſt quadrati C D. Sed et quatum ex A E quadrati ex A C eſt duplum. Ergo quadradrata ex A E, E F dupla ſunt quadratorum ex A C, C D; quadratis vero ex A E, E F æquale [a] eſt ex A F quadratum; quoniam angulus A E F rectus eſt; quadratum igitur ex A F quadratorum ex A C, C D eſt duplum. Sed quadrato ex A F æqualia ſunt ex A D, D F quadrata; rectus enim eſt angulus, qui ad D. Ergo ex A D, D F quadrata dupla ſunt quadratorum ex A C, C D. Eſt autem D F ipſi D B æqualis; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, et in partes inæquales ſecta fuerit; quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata, dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur. *Q. E. D.*

[X.] PROP. X. THEOR.

*Si recta linea ſecetur bifariam, et ipſi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ ſiunt, utraque quadrata dupla ſunt et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ conſtat, tanquam ab unâ lineâ, deſcribitur.*

Recta enim linea A B ſecetur bifariam in C, et ipſi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla eſſe. Ducatur enim a puncto C ipſi
[c] 11. primi. A B ad rectos [c] angulos C E, et utrique ipſarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque




A E,

A E, E B; et per E quidem ipsi A D parallela [x] ducatur [x] 31. primi.
E F; per D vero ducatur D F parallela [x] ipsi C E. Et quoniam in parallelas E C, F D recta quædam linea E F incidit, anguli C E F, E F D æquales [y] sunt duobus rectis. [y] 29. primi.
Anguli igitur F E B, E F D duobus rectis sunt minores. Quæ autem a minoribus, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur, convenient inter se [z]. Ergo E B, [z] Ax. 12.
F D productæ ad partes B, D convenient. Producantur, et conveniant in puncto G; et A G ducatur. Itaque quoniam A C est æqualis C E, et angulus A E C angulo E A C æqualis [a] erit; atqui est rectus qui ad C; uterque [a] 5. primi.
igitur ipsorum C A E, A E C est recti dimidium. Eâdem ratione, et recti dimidium est uterque C E B, E B C. Quapropter et illi inter se sunt æquales, et totus A E B est rectus. Jam vero anguli G B D, E B C, cum sint ad verticem, sunt inter se æquales [b]. Quare et anguli G B D, [b] 15. primi.
B E C inter se æquales [c]. Et præterea, cum in rectas [c] Ax. 1.
parallelas G D, E C recta G E incidat; anguli alterni B G D, B E C erunt inter se æquales [d]. Quare angulus [d] 29. primi.
D B G angulo D G B æqualis [c]. Ac proinde in triangulo D B G, latera B D, D G sunt inter se æqualia [e]. Rursum [e] 6. primi.
cum in rectas parallelas B D, E F recta G E incidat; angulus exterior G B D interiori G E F æqualis erit. Idem autem G B D ipsi E G D æqualis. Quare anguli G E F, E G F inter se sunt æquales, et in triangulo F G E, latera F G, F E inter se æqualia. Et cum E C sit æqualis C A; et quadratum ex E C æquale est ei, quod ex C A fit, quadrato. Ergo quadrata ex E C, C A dupla sunt quadrati ex C A. Quadratis autem ex E C, C A æquale [f] est quadratum ex E A; [f] 47. primi.
quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. Rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est et ex G F quadratum quadrato ex F E. Quadrata igitur ex G F, F E quadrati ex E F sunt dupla. At quadratis ex G F, F E æquale est [f] quod ex E G quadratum; ergo quadratum ex E G duplum est quadrati ex E F; æqualis autem est E F ipsi C D; quadratum igitur ex E G quadrati ex C D duplum erit. Sed ostensum est quadratum ex E A duplum quadrati ex A C. Ergo ex A E, E G quadrata quadratorum ex A C, C D sunt dupla. Quadratis vero ex A E, E G æquale est [f] quod ex A G quadratum; quadratum igitur ex A G duplum est quadratorum ex A C, C D. At quadrato ex A G æqualia [f] sunt ex A D, D G quadrata; ergo quadrata ex A D, D G sunt

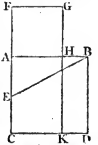
 dupla

dupla quadratorum ex A C, C D; sed D G est æqualis D B; quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in directum quædam recta linea adjiciatur; quæ a totâ cum adjectâ, et adjectâ fiunt, utraque quadrata dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati quod ab eâ, quæ ex dimidiâ et adjectâ constat, tanquam ab unâ lineâ, describitur. *Q. E. D.*

[XI.] PROP. XI. PROBL.

*Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.*

Sit data recta linea A B. Oportet ipsam A B ita secare, ut quod sub totâ, et alterâ parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod a reliquâ parte fit, quadrato.




[f] 46. primi. Describatur [f] igitur ex A B quadratum A B C D, seceturque A C bifariam in E, et B E ducatur; deinde, productâ C A in F, ponatur ipsi B E æqualis E F; describaturque ex A F quadratum F G H A, et G H ad K producatur. Dico A B sectam esse in H, ita ut sub A B, B H rectangulum æquale sit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum A F; rectangulum sub C F, F A, una cum

[g] 6. hujus. quadrato ex A E, æquale [g] erit quadrato ex E F; sed E F est æqualis E B; rectangulum igitur sub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale est ei, quod fit ex E B, qua-

[h] 47. primi. drato. Quadrato autem ex E B æqualia sunt [h] quadrata ex B A, A E; etenim angulus ad A rectus est; ergo rectangulum sub C F, F A, una cum quadrato ex A E, æquale est quadratis ex B A, A E. Commune auferatur quod ex A E fit quadratum. Reliquum igitur rectangulum sub C F, F A æquale est quadrato ex A B. Est autem rectangulum F K sub C F, F A; siquidem A F est æqualis F G: quadratum autem ex A B est ipsum A D. Rectangulum igitur F K æquale est quadrato A D. Commune auferatur A K. Ergo reliquum F H reliquo H D est æquale. Atqui est H D rectangulum sub A B, B H, cum A B sit æqualis B D, et F H est quadratum ex A H.

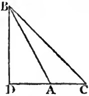
Rectan-

Rectangulum igitur sub A B, B H quadrato ex A H æquale erit. Quare data recta linea A B secta est in H, ita ut sub A B, B H rectangulum quadrato ex A H sit æquale. *Q. E. F.*

## PROP. XII. THEOR. [XII.]

*In obtusangulis triangulis, quod a latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum.*

Sit obtusangulum triangulum A B C, obtusum angulum habens B A C; et ducatur [i] a puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico quadratum ex B C majus esse, quam quadrata ex B A, A C, rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. Quoniam enim recta linea C D secta est utcunque in puncto A; erit quadratum ex C D æquale [k] et quadratis ex C A, A D, et ei, quod bis sub C A, A D continetur rectangulo. Commune apponatur ex D B quadratum. Quadrata igitur ex C D, D B æqualia sunt et quadratis ex C A, A D, D B, et rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. Sed quadratis ex C D, D B æquale est [l] quadratum ex C B, rectus enim est angulus ad D, cum sit B D perpendicularis. Quadratis vero ex A D, D B æquale est [l] quadratum ex A B. Quadratum igitur ex C B, æquale est et quadratis ex C A, A B, et rectangulo bis sub C A, A D contento. Ergo quadratum ex C B majus est quam quadrata ex C A, A B, rectangulo quod bis sub C A, A D continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod fit a latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, et lineâ assumptâ exterius a perpendiculari ad angulum obtusum. *Q. E. D.*

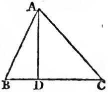



[i] 12. primi.
[k] 4. hujus.
[l] 47. primi.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

*In acutangulis triangulis, quod a latere acutum angulum ſubtendente ſit quadratum, minus eſt quam quadrata, quæ ſiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus aſſumtâ ad angulum acutum.*

Sit acutangulum triangulum A B C, acutum habens angulum ad B; et ducatur a puncto A [m]ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C, minus eſſe quam quadrata, quæ ex C B, B A fiunt, rectangulo, quod bis ſub C B, B D continetur. Quoniam enim recta linea C B ſecta eſt utcunque in D, erunt quadrata ex C B, B D æqualia [n] et rectangulo, quod bis ſub C B, B D continetur, et quadrato ex D C. Commune apponatur ex A D quadratum. Quadrata igitur ex C B, B D, D A æqualia ſunt et rectangulo bis ſub C B, B D contento, et quadratis ex A D, D C. Sed quadratis ex B D, D A æquale eſt [o] ex A B quadratum, rectus enim angulus eſt qui ad D; quadratis vero ex A D, D C æquale [o] eſt quadratum ex A C; quadrata igitur ex C B, B A ſunt æqualia quadrato ex A C, et ei, quod bis ſub C B, B D continetur, rectangulo. Quare ſolum quadratum ex A C minus eſt quam quadrata ex C B, B A, rectangulo, quod bis ſub C B, B D continetur. In acutangulis igitur triangulis, quadratum, quod a latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata, quæ fiunt a lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis ſub uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et lineâ a perpendiculari intus aſſumptâ ad angulum acutum. *Q. E. D.*



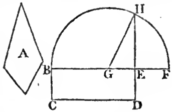

[m] 12. primi.
[n] 7. hujus.
[o] 47. primi.

PROP.

## PROP. XIV. PROBL. [XIV.]

*Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.*

Sit datum rectilineum A. Oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere. Conſtituatur ᵖ rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum B C D E. Si igitur B E eſt æqualis E D, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt B D. Si B E, E D ſint inæquales, producatur earum alterutra ad F, ponaturque ipſi E D æqualis E F. Deinde ſectâ F B bifariam ᑫ in G; centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G B, G F, ſemicirculus deſcribatur B H F; producaturque D E in H, et G H ducatur. Quoniam igitur recta linea B F ſecta eſt in partes æquales ad G, inæquales ad E; erit rectangulum ſub B E, E F, una cum quadrato, quod ſit ex E G ʳ, æquale quadrato ex G F. Eſt autem G F æqualis G H; rectangulum igitur ſub B F, E F, una cum quadrato ex G E, æquale eſt quadrato ex G H. Sed quadrato ex G H æqualia ˢ ſunt ex H E, E G quadrata. Ergo rectangulum ſub B E, E F, una cum quadrato ex E G, æquale eſt quadratis ex H E, E G. Commune auferatur ex E G quadratum. Reliquum igitur rectangulum ſub B E, E F eſt æquale quadrato ex E H. Sed rectangulum ſub B E, E F eſt ipſum B D parallelogrammum, quoniam E F eſt æqualis E D; ergo B D parallelogrammum quadrato ex E H eſt æquale. Parallelogrammum autem B D eſt æquale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex E H deſcripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſâ E H deſcribitur. *Q. E. F.*




ᵖ 45. primi.
ᑫ 10. primi.
ʳ 5. hujus.
ˢ 47. primi.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER TERTIUS.

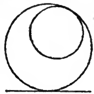
### DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [II.]

RECTA linea circulum contingere dicitur, quæ circumferentiam circuli in occurſu non ſecat.

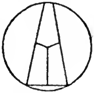
II. [III.]

Circuli contingere ſe dicuntur, quorum circumferentiæ in occurſu ſe mutuo non ſecant.



III. [IV.]

In circulo æqualiter diſtare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.



IV. [V.]

Magis autem diſtare a centro dicitur ea, in quam major perpendicularis cadit.

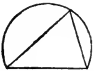
V.

[VI.] V.



Segmentum circuli eſt figura, quæ circumferentiâ circulari et lineâ rectâ continetur. Quæ quidem recta baſis dicitur ſegmenti.

[VII.] VI.



Segmenti autem angulus eſt, qui baſi, et circumferentiâ circulari comprehenditur.

[VIII.] VII.

In ſegmento eſt angulus, lineis rectis comprehenſus a puncto quovis in circumferentiâ ſegmenti utcunque ſumpto ad terminos baſis ductis.



[IX.] VIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ intercipiunt circumferentiam; angulus in illâ conſiſtere dicitur.

[X.] IX.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentiâ ipſis interceptâ.

[XI.] X.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.



Def. I. AXIOMA.

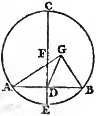
Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

PROPO-

## PROPOSITIO I. PROBLEMA. [I.]

*Dati circuli centrum invenire.*

Sit datus circulus A B C; oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso recta linea A B utcunque; quæ in puncto D bifariam [a] secetur. A puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; et secetur C E bifariam [a] in F. Dico punctum F circuli A B C centrum esse. Non enim; sed si fieri potest, sit G centrum, et G A, G D, G B ducantur. Itaque quoniam D A est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D, D G duabus D B, G D æquales, altera alteri: et basis G A æqualis [c] est basi G B; sunt enim ex centro G. Angulus igitur A D G angulo G D B est [d] æqualis. Cum autem recta linea super rectam lineam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, [e] rectus est uterque æqualium angulorum. Ergo angulus G D B est rectus; sed et rectus F D B; æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, major minori; quod fieri non potest. Quare G non est circuli A B C centrum. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. Ergo F centrum est circuli A B C. *Q. E. F.*



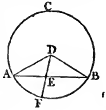

[a] 10. primi.
[b] 11. primi.
[c] Def. 15. primi.
[d] 8. primi.
[e] Def. 10. primi.

*Cor.* Si in circulo quævis recta linea lineam quandam bifariam et ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

## PROP. II. THEOR. [II.]

*Si in circumferentiâ circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea, intra circulum cadet.*

Sit circulus A B C; in circumferentiâ ipsius sumantur duo quævis puncta A, B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Sumatur enim in rectâ A B punctum quodvis E; jungantur D A, D E, D B; et in D E, si opus sit, productâ, capiatur D F ipsi D A vel D B æqualis. Quoniam D A est æqualis D B, erit [f] angulus D A B æqualis angulo D B A;

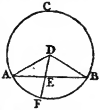



[f] 5. primi.

et

et quoniam trianguli D A E latus A E producitur, erit angulus D E B angulo D A E major; angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E est major. Sed majori angulo majus latus fubtenditur; major igitur est D B ipsâ D E. Quare et D F, quæ ipsi D B fumpta est æqualis, major est quam D E. Punctum igitur E punctis D, F necessario interjacet. Sed propter æquales D B, D F punctum F ad ipsam erit circuli circumferentiam. Punctum igitur E necesse est intus cadat. Similiter de alio omni puncto rectæ A B inter ipsa A, B ostendi potest, intra circumferentiam esse. Si igitur in circumferentiâ &c. *Q. E. D.*

g 16. primi.




*Cor.* Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

[III.]

## PROP. III. THEOR.

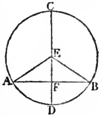
*Si in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secabit; quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.*

Sit circulus A B C; et in ipso recta linea per centrum ducta, C D, rectam lineam quandam, A B, non ductam per centrum bifariam fecet in puncto F. Dico ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur enim circuli A B C centrum [h], quod fit E; et E A, E B jungantur. Quoniam igitur A F est æqualis F B, communis autem F E, duæ A F, F E duabus B F, F E æquales sunt; et basis E A basi E B est æqualis. Ergo et angulus A F E angulo B F E æqualis [i] erit. Cum autem recta linea super rectam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est [k] uterque æqualium angulorum; uterque igitur A F E, B F E est rectus. Quare recta linea C D per centrum ducta rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero C D secet A B ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est,

h 1. hujus.

i 8. primi.

k Def. 10. primi.




A F

A F ipſi F B æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam E A, quæ ex centro, eſt æqualis E B, et angulus E A F angulo [l] E B F æqualis erit; eſt autem et A F E [l] rectus æqualis recto B F E; duo igitur triangula E A F, E B F duos angulos duobus angulis æquales habent; unumque latus uni lateri æquale, E F ſcilicet utriſque commune, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [m] habebunt; atque erit A F ipſi F B æqualis. Si igitur in circulo recta linea, per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, et bifariam ſecabit. *Q. E. D.*

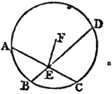
[l] 5. primi.

[m] 26. primi.

## PROP. IV. THEOR. [IV.]

*Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non ductæ per centrum; ſeſe bifariam non ſecabunt.*

Sit circulus A B C D; et in ipſo duæ rectæ lineæ A C, B D ſe invicem ſecent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas ſeſe bifariam non ſecare. Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ita ut A E ſit æqualis E C, et B E ipſi E D; ſumaturque [n] centrum A B C D circuli, quod ſit F; et E F jungatur. Quoniam igitur recta linea F E per centrum ducta rectam lineam quandam A C non ductam per centrum bifariam ſecat, et ad rectos angulos ipſam ſecabit [o]; quare rectus eſt F E A angulus. Rurſus quoniam recta linea F E rectam lineam quandam B D non ductam per centrum bifariam ſecat, et ad angulos rectos ipſam [o] ſecabit; rectus igitur angulus eſt F E B. Oſtenſus autem eſt rectus et F E A. Ergo F E A angulus ipſi F E B æqualis erit, minor majori; quod fieri non poteſt. Non igitur A C, B D ſeſe bifariam ſecant. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non ductæ per centrum; ſeſe bifariam non ſecabunt. *Q. E. D.*




[n] 1. hujus.

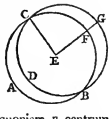
[o] 3. hujus.

PROP.

[V.] PROP. V. THEOR.

*Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.*

Duo enim circuli A B C, C D G se invicem secent in puncto C. Dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque E C; et sumatur in circumferentiâ C G D punctum aliquod G, quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta E G circumferentiæ A C B in F occurrat. Quoniam E centrum est circuli A B C,

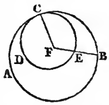



erit C E ipsi E F æqualis. Rursus quoniam E centrum est C D G circuli, æqualis est C E ipsi E G. Sed ostensa est C E æqualis E F; ergo E F ipsi E G æqualis erit, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur punctum E centrum est circulorum A B C, C D G. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.*

Duo enim circuli A B C, C D E contingant sese intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. Si enim fieri potest, sit F; jungaturque F C, et sumatur in circumferentiâ A B C punctum aliquod B, quod non sit circumferentiis utrisque commune. Juncta F B circumferentiæ C E D in E occurrat. Quoniam igitur F centrum est circuli A B C, æqualis est




C F ipsi F B. Rursus quoniam F centrum est circuli C D E, erit C F æqualis F E. Ostensa autem est C F æqualis F B; ergo et F E ipsi F B est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F punctum centrum est circulorum A B C, C D E. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. *Q. E. D.*

PROP.

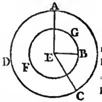
SCHOLION.*

Melius esset, nostro saltem judicio, si pro duabus propositionibus, quintâ et sextâ, hæc una substitueretur, quæ utramque complexa est.

PROPOSITIO.*

*Circuli, eodem centro inæqualibus intervallis descripti, sibi mutuo nullibi occurrunt.*

Centro quodam communi E, intervallis inæqualibus E A, E B descripti sint circuli A C D, F G B. Dico circulos illos sibi mutuo non occurrere. Occurant enim, si fieri potest, in C. Jungatur E C. Recta E A ipsi E C æqualis erit[p]. Sed eidem E C æqualis erit E B[p]. Æquales igitur E A, E B[q]. Quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Circuli igitur A C D, F G B, sibi mutuo in puncto C non occurrunt. Pari ratione, nec in alio quovis puncto. Nullibi igitur. *Q. E. D.*

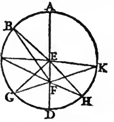



[p] Def. 15. primi.
[q] Ax. 1. primi.

PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in quâ centrum: minima vero reliqua: aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore major est: at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.*

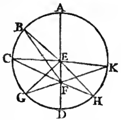
Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, et in ipsâ A D sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et a puncto F in circulum A B C D cadant quædam rectæ lineæ F B, F C, F G. Dico F A maximam esse, et F D minimam: aliarum vero, F B quidem majorem quam F C, et F C majorem quam F G. Jungantur enim B E, C E, G E. Et quoniam omnis trianguli duo latera[r] reliquo sunt majora;




[r] 20. primi.

F majora;

majora; erunt B E, E F majores quam B F. Eſt autem A E æqualis B E; ergo B E, E F ipſi A F ſunt æquales; major igitur eſt A F quam F B. Rurſus quoniam B E eſt æqualis C E, communis autem F E; duæ B E, E F duabus C E, E F æquales ſunt: ſed B E F angulus major eſt angulo C E F: baſis igitur B F baſi F C eſt [s] major. Eadem ratione, et C F major eſt quam F G. Rurſus quoniam G F, F E majores [t] ſunt quam G E, æqualis autem G E ipſi E D; erunt G F, F E majores quam E D; communis auferatur F E; ergo reliqua G F major eſt quam reliqua F D. Maxima igitur eſt F A, et F D minima: major vero B F quam F C, et F C quam F G major. Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas æquales eadere in circulum A B C D ad utraſque partes minimæ F D. Conſtituatur [u] enim ad lineam E F atque ad datum in eâ punctum E, angulo G E F æqualis angulus F E H: et F H jungatur. Quoniam igitur G E eſt æqualis E H, communis autem E F; duæ G E, E F duabus H E, E F æquales ſunt: et angulus G E F eſt æqualis angulo H E F; baſis igitur F G baſi F H æqualis [x] erit. Dico a puncto F in circulum non cadere aliam ipſi F G æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat F K; et quoniam F K eſt æqualis F G, eſtque ipſi F G æqualis F H, erit et F K ipſi F H æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, &c. *Q. E. D.*



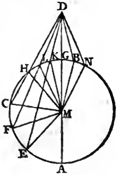

[s] 24. primi.
[t] 20. primi.
[u] 23. primi.
[x] 4 primi.

PROP.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem, quæ in cavam circumferentiam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum autem, propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore major est: at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est, quæ inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero, quæ propinquior minimæ, semper remotiore est minor: duæ autem tantum æquales a puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.*

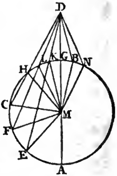
Sit circulus A B C, et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam D A, D E, D F, D C: sitque D A per centrum. Dico earum quidem, quæ in cavam A E F C circumferentiam cadunt, maximam esse D A, quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D et diametrum A G interjicitur, videlicet D G: majorem autem D E quam D F; et D F majorem quam D C: earum vero, quæ in convexam circumferentiam H L K C cadunt, quæ propinquior est minimæ D G, semper remotiore esse minorem; hoc est, D K minorem quam D L, et D L minorem quam D H.




Sumatur [y] enim centrum circuli A B C, quod sit M, et jungantur M E, M F, M C, M H, M L, M K. Et quoniam A M est æqualis M E, communis apponatur M D; ergo A D est æqualis ipsis E M, M D; sed E M, M D sunt majores [z] quam E D: ergo et A D quam E D est major. Rursus quoniam æqualis est M E ipsi M F, communis apponatur M D; erunt E M, M D ipsis M F, M D æquales; at angulus E M D major est angulo F M D; basis igitur E D basi F D major [a] erit. Similiter demonstrabimus, et F D majorem esse quam C D. Ergo maxima est D A; major autem D E quam D F, et D F quam D C major. Præterea quoniam M K, K D sunt majores [z] quam M D, et M K est æqualis

[y] 1. hujus.
[z] 20. primi.
[a] 24. primi.

[b] Ax. 4. primi. æqualis M G; erit reliqua K D quam reliqua [b] G D major: quare G D minor quam K D. Et quoniam trianguli M L D in uno latere M D, duæ rectæ lineæ M K, K D intra constituuntur; erunt [c] 21. primi. [c] M K, K D minores ipsis M L, L D, quarum M K est æqualis M L; reliqua igitur D K minor est quam reliqua D L. Similiter ostendemus, et D L quam D H minorem esse. Ergo D G minima est: minor vero D K quam D L, et D L minor quam D H. Dico etiam duas tantum æquales a puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. Constituatur ad rectam lineam M D,

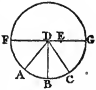



[d] 23. primi. ad datumque in ea punctum M, angulo K M D æqualis [d] angulus D M B, et D B jungatur. Itaque quoniam M K est æqualis M B, communis autem M D; duæ K M, M D duabus B M, M D æquales sunt, altera alteri; et angulus K M D æqualis angulo B M D; basis igitur D K basi D B est æqualis [e]. [e] 4. primi. Dico a puncto D aliam ipsi D K æqualem in circulum non cadere. Si enim fieri potest, cadat D N: et quoniam D K est æqualis D N, et D K ipsi D B est æqualis; erit et D B æqualis D N, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. *Q. E. D.*

## [IX.] PROP. IX. THEOR.

*Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.*

Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque a puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A, D B, D C. Dico punctum D, quod sumitur, circuli A B C esse centrum. Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta D E in F, G producatur; ergo F G diameter est A B C circuli. Itaque quoniam in F G diametro circuli A B C sumptum est aliquod

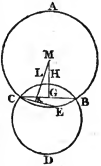


aliquod punctum D, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [f] autem D C quam D B, [f 7. hujus.] et D B quam D A; sed et æquales [g] D C, D B, D A; [g ex hyp.] quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli A B C. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse, præter ipsum D. Ergo D circuli B C centrum erit. *Q. E. D.*

## PROP. X. THEOR. [X.]

*Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.*

Nam si fieri potest circuli duo A B C, D B C tribus punctis B, C, et E, se mutuo secent. Jungantur C B, C E. Media dividatur recta C B in puncto G, et a puncto G ad perpendiculum educatur recta G H. Media etiam dividatur recta C E in puncto K, et a puncto K ad perpendiculum educatur K L. Rectæ G H, K L, duabus C B, C E non parallelis ad perpendiculum eductæ, sibi mutuo non erunt parallelæ. Occurrent igitur. Occursus esto M. Jam cum puncta C, B ad peripheriam sint circuli A B C, recta C B intra circulum erit [h]. Recta autem H G rectam C B, in circulo A B C inscriptam, mediam dividit, et ad rectos [i]. Centrum igitur circuli A B C erit ad rectam G H [k]. Pari ratione centrum circuli A B C erit ad rectam K L, quæ rectam C E circulo inscriptam mediam dividit, et ad rectos. Centrum igitur circuli A B C commune est rectarum G H, K L punctum. Sed harum rectarum solum est commune M, punctum utique concursûs. Punctum igitur M centrum est circuli A B C. Sed simili modo ostendemus punctum illud idem M circuli D B C centrum esse. Nimirum ad cujus peripheriam, æque ac alterius A B C, sunt puncta B, C, E [l]. Circulorum igitur A B C, D B C, se mutuo secantium idem est centrum M. Quod est absurdum [m]. Duo igitur circuli A B C, D B C in punctis tribus B, C, E sibi mutuo non occurrunt. Simili ratione nec in aliis tribus. Circulus igitur circulum &c. *Q. E. D.*

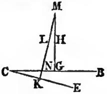



[h 2. hujus.]
[i Per construct.]
[k Cor. 1. hujus.]
[l ex hyp.]
[m 5. hujus.]

## SCHOLION.*

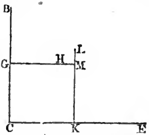
Illud autem quod assumpsimus, duas rectas non esse parallelas, si duabus aliis ad perpendiculum sint non parallelis, sic ostendimus.

Duabus rectis C B, C E non parallelis ad perpendiculum sint duæ G H, K L. Dico duas G H, K L non esse parallelas. Recta enim L K, quæ duarum C B, C E in C occurrentium alteri C E ad perpendiculum est [n], alteri C B vel occurret, vel ei parallela erit. Occurrat primum. Occursus sit N. In triangulo igitur C N K, angulus ad K rectus est. Duo igitur C N K, K C N simul sumpti recto sunt æquales [o]. Angulus igitur C N K, et illi æqualis L N G, recto minor. Sed angulus ad G rectus [p]. Duo igitur H G N, L N G simul sumpti duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur G H, N L, seu K L, productæ inter se convenient [q]. Non sunt igitur parallelæ.




[n] ex hyp.
[o] 32. primi.
[p] ex hyp.
[q] Ax. 12. primi.

CAS. 2. Sed parallela sit K L ipsi C B. Si eadem K L parallela sit ipsi G H, erunt G H, C B inter se parallelæ [r]. Quod est absurdum. Cum recta G H illam C B in puncto G ad perpendiculum insistat [s]. Non igitur sunt parallelæ G H, K L. *Q. E. D.*




[r] 30. primi.
[s] ex hyp.

*Cor.* * Rectis K L, G H, occursum usque in M productis, angulus ad M angulo ad C æqualis erit. Nam in casu primo, triangulorum M G N, C K N, anguli ad G, K æquales sunt. Uterque enim rectus. Sed anguli M N G, C N K æquales, ad verticem scilicet. Reliquus igitur N M G reliquo N C K æqualis.

In casu secundo, quoniam L K, C B sunt parallelæ, propter angulum ad K rectum [t], rectus erit angulus ad C [u]. Sed angulus ad G rectus [x]. Rectæ igitur G M, C K sunt inter

[t] ex hyp.
[u] 29. primi.
[x] ex hyp.

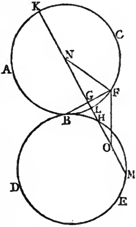
inter se parallelæ [y]. Figura igitur C M K C est parallelogrammum. Anguli igitur oppositi C et M sunt inter se æquales [z], et eorum uterque rectus est. [y] 28. primi. [z] 34. primi.

## PROP. XI. THEOR. [XIII.]

*Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.*

Circuli duo A B C, D B E puncto B se mutuo contingant. Dico in alio præter B puncto sibi mutuo non occurrere. Nam si fieri potest, in alio puncto F occurrant. Juncta B F, media dividatur in puncto G; rectaque G K ad perpendiculum educta peripheriæ circuli A B C in punctis K, L, circuli autem D B E in H, M occurrat. Jam cum puncta B, F ad peripheriam sint circuli A B C, recta B F intra circulum cadet [a], et ad rectam G K erit centrum circuli A B C [b]. Simili modo ostendetur centrum circuli D B E esse ad rectam G K. Media igitur dividatur recta L K puncto N, rectaque H M puncto O. Erit N centrum circuli A B C, et O centrum circuli D B E. Jungantur F N, F O. Circuli A B C, D B E vel extra, vel intus, se mutuo contingunt. Contingant extra primum.

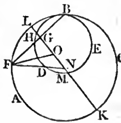
[a] 2. hujus. [b] Cor. 1. hujus.




CAS. I. Jam cum N centrum sit circuli A B C, erunt N F, N L inter se æquales. Et cum O centrum sit circuli D B E, erunt O H, O F inter se æquales. Duæ igitur F N, F O simul sumptæ duabus N L, O H simul sumptis sunt æquales. Duæ autem N L, O H simul sumptæ tota recta N O sunt minores. Duæ igitur F N, F O simul sumptæ recta O N sunt minores. Trianguli igitur N F O latera duo F N, F O simul reliquo minora. Quod est absurdum [c]. Circuli igitur se mutuo extra non contingunt plus uno punctis.

[c] 20. primi.

CAS. 2. Sed intus contingant. Et interior fit D B E. Jam cum O centrum fit circuli D B E, æquales erunt inter fe O F, O H. Addatur O N. Duæ igitur O F, O N fimul fumptæ rectæ N H funt æquales. Recta autem N H rectâ N L minor, propter peripheriam circuli DBE interiorem. Duæ igitur O F, O N fimul fumptæ rectâ N L funt minores. Sed cum punctum N centrum fit circuli A B C, æquales inter fe funt N L, N F. Duæ igitur O F, O N fimul fumptæ rectâ N F funt minores. Trianguli igitur F O N, latera duo O F, O N fimul reliquo funt minora. Quod eft abfurdum [d]. Circuli igitur intus fe mutuo non contingunt plus uno punctis. Quare circulus circulum &c. *Q. E. D.*

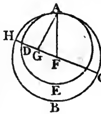



[d] 20. primi.

[XI.] PROP. XII. THEOR.

*Si duo circuli fefe intus contingant, et fumantur centra ipforum; recta linea, ipforum centra conjungens, producta, in circulorum contactum cadet.*

Duo enim circuli A B C, A D E fefe intus contingant in puncto A, et fumatur circuli quidem A B C centrum, quod fit F, circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam a puncto G ad F ductam, fi producatur, in punctum A cadere. Non enim; fed fi fieri poteft, cadat ut F G D H; et A F, A G jungantur. Itaque quoniam A G, G F majores [d] funt quam F A, hoc eft, quam F H, communis auferatur F G; reliqua igitur A G major eft quam reliqua G H. Sed A G eft æqualis G D; ergo G D ipfâ G H eft major, minor majore, quod fieri non poteft. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet; quare in ipfum cadat neceffe eft. Si igitur duo circuli fefe intus contingant, recta linea, ipforum centra conjungens, fi producatur, in contactum circulorum cadet. *Q. E. D.*



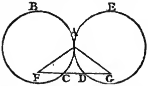

[d] 20. primi.

PROP.

## PROP. XIII. THEOR. [XII.]

*Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.*

Duo enim circuli A B C, A D E sese extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem A B C centrum, quod sit F; circuli vero A D E centrum G. Dico rectam lineam, quæ a puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim; sed, si fieri potest,




cadat ut F C D G; et F A, A G jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli A B C, erit A F æqualis F C. Rursus quoniam G centrum est A D E circuli, erit A G ipsi G D æqualis. Ostensa est autem et A F æqualis F C; sunt igitur F A, A G ipsis F C, D G æquales, ergo tota F G major est quam F A, A G; sed et minor [c]; quod fieri non potest. Non igitur a puncto F ad G ducta recta linea per contactum A non transibit; quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit. *Q. E. D.* [c] 20. primi.

### SCHOLION.*

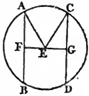
Inversam Theoni Propositionum seriem in melius mutavimus. Primum scilicet docendum erat, circulorum contactus quid sit; merum nempe punctum geometricum; dein demonstrandum, rectam centra jungentem in punctum illud necessario incidere. Hæc nobiscum meditati, in locum undecimæ revocandam judicavimus, quæ Theoni decima tertia est.

## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales.*

Sit circulus A B D C, et in ipso æquales rectæ lineæ A B, C D. Dico eas a centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli A B D C centrum, quod sit E, et ab ipso ad A B, C D perpendiculares ducantur E F, E G; et A E, E C jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta E F rectam lineam quandam A B non ductam

ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit[f]; quare A F est æqualis F B, ideoque A B ipsius A F dupla. Eâdem ratione, et C D dupla est C G; atque est A B ipsi C D æqualis; æqualis igitur et A F ipsi C G; et quoniam A E est æqualis E C, erit et quadratum ex A E quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia sunt ex A F, F E quadrata[g]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex E C æqualia sunt quadrata ex E G, G C, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex A F, F E æqualia sunt quadratis ex C G, G E, quorum quadratum ex A F quadrato ex C G æquale, etenim æqualis est A F ipsi C G: reliquum igitur quod fit ex F E quadratum, æquale est reliquo quod ex E G; ac propterea F E ipsi E G est æqualis. In circulo autem æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales [h] sunt. Ergo A B, C D a centro æqualiter distant. Sed si A B, C D æqualiter distent a centro, hoc est, si æqualis sit F E ipsi E G; dico A B ipsi C D æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A B duplam esse ipsius A F, C D duplam ipsius C G. Et quoniam æqualis est A E ipsi E C, erit et ex A E quadratum quadrato ex E C æquale; sed quadrato quidem ex A E æqualia [g] sunt quadrata ex E F, F A; quadrato autem ex E C æqualia [g] quadrata ex E G, G C. Quadrata igitur ex E F, F A quadratis ex E G, G C æqualia sunt, quorum quadratum ex E G æquale est quadrato ex E F, est enim E G ipsi E F æqualis: reliquum igitur ex A F quadratum æquale est reliquo ex C G: ergo A F ipsi C G est æqualis. Atqui est A B ipsius A F dupla, et C D dupla ipsius C G. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; et quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales. *Q. E. D.*




[f] 3. hujus.

[g] 47. primi.

[h] Def. 3. hujus.

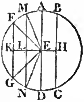
[XV.] PROP. XV. THEOR.

*In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.*

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D, centrum E; et propinquior quidem diametro A D sit B C; remotior

vero

vero F G. Dico A D maximam esse, et B C majorem quam F G. Ducantur enim a centro E ad B C, F G perpendiculares E H, E K. Et quoniam B C propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem F G; erit E K quam E H major. Ponatur ipsi E H æqualis E L; et per L ipsi E K ad rectos angulos ducta L M in N producatur; et jungantur E M, E N, E F, E G. Quoniam igitur E H est æqualis E L,




erit et B C ipsi M N æqualis [i]. Rursus quoniam æqualis est A E ipsi E M, et D E ipsi E N; erit et A D ipsis M E, E N æqualis; sed M E, E N [k] majores sunt quam M N; ergo et A D major est quam M N; et M N est æqualis B C, erit igitur A D quam B C major. Quod cum duæ E M, E N duabus F E, E G æquales sint, angulusque M E N major angulo F E G; et basis M N basi F G major [l] erit. Ostensa autem est M N æqualis B C; ergo et B C quam F G est major. Maxima igitur est A D diameter, et B C major quam F G. Quare in circulo maxima est diameter; aliarum vero, semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore est major. *Q. E. D.*

[i] 14. hujus.
[k] 20. primi.
[l] 24. primi.

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

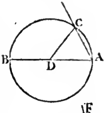
***Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum; et in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.***

Sit circulus A B C circa centrum D, et diametrum A B. Dico rectam lineam, quæ a puncto A ipsi A B ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere. Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus, ut A C; et D C jungatur. Itaque quoniam æqualis est D A ipsi D C, erit et angulus D A C angulo A C D æqualis [m]; rectus autem est D A C; ergo et A C D est rectus; ac propterea anguli D A C, A C D duabus rectis æquales sunt; quod fieri non potest [n]. Non igitur a puncto A ipsi B A ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. Extra igitur cadat necesse est. Cadat ut A E. Dico in locum, qui inter rectam lineam A E et circumferentiam C H A interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat ut F A,

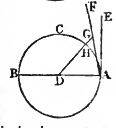
[m] 5. primi.
[n] 17. primi.

et

[o] 12. primi. et a puncto D ad F A perpendicularis [o] ducatur D G. Et quoniam rectus est angulus A G D, minor autem recto D A G, erit D A




[p] 19. primi. quam D G major [p]; æqualis autem est D A ipsi D H; major igitur est D H ipsâ D G, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam et circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui rectâ lineâ B A et circumferentiâ C H A continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentiâ C H A et rectâ lineâ A E omni angulo rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, aut aliquis minor contento C H A circumferentiâ et rectâ lineâ A E; in locum, qui inter circumferentiam C H A et rectam lineam A E interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorem quidem contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, qui scilicet rectis lineis continetur; minorem vero contento circumferentiâ C H A, et A E rectâ lineâ.




[q] ex prius demonstratis. Non cadit autem [q]; non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento rectâ lineâ B A et C H A circumferentiâ, neque minor contento circumferentiâ C H A et A E rectâ lineâ. *Q. E. D.*

*Cor.* Ex hoc manifestum est rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere.

[XVII.] PROP. XVII. PROBL.

*A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.*

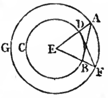
Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus B C D. Oportet a puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum B C D contingat. Sumatur centrum circuli E; et junctâ A E, quæ circumferentiæ B D C in D occurrat, centro quidem E, intervallo autem E A, circulus A F G describa-

describatur; et a puncto D ipsi E A ad rectos angulos[r] ducatur D F, quæ circumferentiæ A F G in F occurrat; jungaturque E F, quæ circumferentiæ C D B in B occurrat; jungatur denique A B. Dico a puncto A ductam esse A B, quæ circulum B C D contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum B C D, A F G; erit E A æqualis E F, et E D ipsi E B. Duæ igitur A E, E B duabus F E, E D æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. Ergo basis D F basi A B est[s] æqualis, triangulumque D E F æquale triangulo E B A, et reliqui anguli reliquis angulis. Æqualis igitur est angulus E B A angulo E D F; et E D F rectus est; quare et rectus E B A; atque est E B ex centro. Quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit[t]. Ergo A B contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea A B, quæ circulum B C D contingit. *Q. E. F.*

r 11. primi.

s 4. primi.

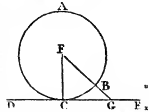
t 16. hujus.




## PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

*Si circulum contingat quædam recta linea, a centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.*

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in puncto C; et circuli A B C centrum sumatur F, a quo ad C ducatur F C. Dico F C ad ipsam D E perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur a puncto F ad D E perpendicularis[u] F G. Quoniam igitur angulus F G C rectus est, erit G C F acutus[x], ac propterea F G C angulus major angulo F C G. Majorem autem angulum majus latus[y] subtendit; major igitur est F C quam F G. Æqualis autem F C ipsi F B; ergo F B ipsâ F G est major, minor majore; quod fieri non potest. Non igitur F G est perpendicularis ad D E. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter ipsam F C. Ergo F C ad D E est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a centro autem




u 12. primi.

x 32. primi.

y 19. primi.

autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. *Q. E. D.*

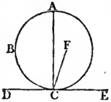
*Cor.* 1.* Rectæ duæ, quæ in oppositis diametri terminis peripheriam circuli contingunt, inter se sunt parallelæ.

*Cor.* 2.* Si duæ rectæ parallelæ circulum contingant, in oppositis diametri terminis necessario illum contingent; neque plures duabus parallelæ eundem circulum contingere possunt.

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

*Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli centrum erit.*

Circulum enim A B C contingat quædam recta linea D E in C, et a puncto C ipsi D E ad rectos angulos ducatur C A. Dico in ipsâ A C circuli centrum esse. Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur C F. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea D E, et a centro ad contactum ducta est F C; erit F C ad ipsam D E perpendicularis [a]. Rectus igitur angulus est F C E; est autem et A C E rectus [b]; ergo F C E angulus est æqualis angulo A C E, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur F centrum est A B C circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsâ A C. Quare si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in eâ circuli erit centrum. *Q. E. D.*



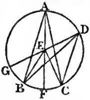

[a] 18. hujus.
[b] ex hyp.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

*In circulo angulus, qui ad centrum, duplex est ejus, qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.*

Sit circulus A B C, ad cujus centrum quidem angulus sit B E C, ad circumferentiam vero B A C, et eandem circumferentiam B C pro basi habeant. Dico B E C angulum anguli B A C duplum esse. Jungatur enim A E, et

et ad F producatur. Itaque quoniam E A eſt æqualis E B, erit et angulus E A B angulo E B A [b] æqualis. Anguli igitur E A B, E B A duplices ſunt ipſius anguli E A B; ſed angulus B E F eſt æqualis [c] angulis E A B, E B A; ergo B E F angulus anguli E A B eſt duplex. Eâdem ratione et angulus F E C duplex eſt ipſius E A C. Totus igitur B E C totius B A C duplex erit. Rurſus inflectatur, et ſit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. Similiter oſtendemus angulum G E C anguli G D C duplum eſſe; quorum G E B duplus eſt ipſius G D B. Ergo reliquus B E C reliqui B D C eſt duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum, duplex eſt ejus, qui ad circumferentiam eſt, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant. *Q. E. D.*

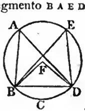


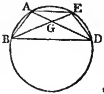

[b] 5. primi.
[c] 32. primi.

## PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

*In circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt.*

Sit circulus A B C D E, et in eodem ſegmento B A E D anguli ſint B A D, B E D. Dico eos inter ſe æquales eſſe. Sumatur enim circuli A B C D E centrum, quod ſit F; junganturque B F, F D. Quoniam angulus quidem B F D eſt ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, et circumferentiam eandem B C D pro baſi habent; erit B F D angulus [d] anguli B A D duplus. Eâdem ratione angulus B F D duplus eſt etiam anguli B E D. Ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. Si anguli B A D, B E D ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales [e] omnibus angulis trianguli D E G. Et anguli A B E, A D E ſunt æquales per hactenus demonſtrata, et anguli A G B, D G E ſunt etiam æquales [f], ad verticem enim ſunt. Quare et reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt. *Q. E. D.*



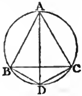




[d] 20. hujus.
[e] 32. primi.
[f] 15. primi.

PROP.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

*Quadrilaterorum, quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt.*

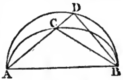



Sit circulus A B D C, et in ipſo quadrilaterum A B D C. Dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Jungantur A D, B C. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales [g], erunt trianguli A B C tres anguli C A B, A B C, B C A æquales duobus rectis. Sed angulus A B C eſt æqualis [h] angulo A D C, in eodem enim ſunt ſegmento A B D C. Et angulus A C B æqualis [h] ipſi A D B, quod ſint in eodem A C D B ſegmento: totus igitur angulus B D C angulis A B C, A C B æqualis eſt. Communis apponatur B A C angulus; erunt anguli B A C, A B C, A C B angulis B A C, B D C æquales. Sed B A C, A B C, A C B ſunt æquales [g] duobus rectis; ergo et anguli B A C, B D C duobus rectis æquales erunt. Similiter oſtendemus angulos quoque A B D, A C D duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. *Q. E. D.*

[g] 32. primi.
[h] 21. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

*Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum ſegmenta ſimilia, et incongrua ex eâdem parte non conſtituentur.*




Si enim fieri poteſt, ſuper eâdem rectâ lineâ A B duo circulorum ſegmenta ſimilia, et incongrua conſtituantur ex eâdem parte, A C B, A D B; circumferentiæ A C B, A B D, cum in punctis duobus A, B ſibi mutuo occurrant, nullum aliud punctum præter illa A, B commune habent [i]. Sed inter A, B altera omnis interior, altera exterior omnis erit. Capiatur in interiori punctum quodvis C; junctaque A C exteriori producta in D occurrat; et C B, B D jungantur. Itaque quoniam ſegmentum A C B ſimile eſt ſegmento A D B, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt [k] æquales; erit A C B angulus æqualis angulo A D B, exterior

[i] 10. hujus.
[k] Def. 10. hujus.

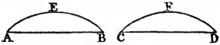
terior interiori; quod fieri non poteft [l]. Non igitur fuper eâdem rectâ lineâ, duo circulorum fegmenta fimilia et incongrua ex eâdem parte conftituentur. *Q. E. D.* [l] 16. primi.

*Cor.* * Segmentorum inæqualium fuper eâdem bafi ad partes eafdem conftitutorum, quod angulum majorem capit, ejus peripheria interior omnis erit.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Super æqualibus rectis lineis fimilia circulorum fegmenta inter fe æqualia funt.*

Sint enim fuper æqualibus rectis lineis A B, C D fimilia circulorum fegmenta A E B, C F D. Dico fegmentum A E B fegmento C F D æquale effe. Applicato enim



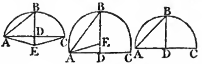

A E B fegmento fegmento C F D, et pofito puncto quidem A in C, rectâ vero lineâ A B in C D; congruet et B punctum puncto D, propterea quod A B ipfi C D fit æqualis. Congruente autem rectâ lineâ A B rectæ C D; congruet et A E B fegmentum fegmento C F D [m]; congruens autem, ipfi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis fimilia circulorum fegmenta inter fe æqualia funt. *Q. E. D.* [m] 23. hujus.

*Cor.* * Segmentorum fimilium, bafibus æqualibus infiftentium, peripheriæ funt inter fe æquales.

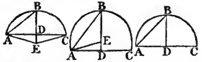
## PROP. XXV. PROBL. [XXV.]

*Circuli fegmento dato, defcribere circulum cujus eft fegmentum.*

Sit datum circuli fegmentum A B C. Oportet defcribere circulum cujus A B C eft fegmentum. Secetur




A C bifariam [a] in D: et a puncto D ipfi A C ad rectos angulos ducatur [o] D B, et A B jungatur. Vel igitur angulus A B D major eft angulo B A D, vel minor, vel ipfi æqualis. Sit primum major, et ad rectam lineam [a] 10. primi. [o] 11. primi.




B A, atque ad datum in eâ punctum A constituatur angulus B A E æqualis [p] angulo A B D; productæ autem B D, A E sibi invicem in E occurrant, jungaturque E C. Quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo B A E, [q] erit et B E recta linea ipsi E A æqualis: et quoniam A D est æqualis D C, communis autem D E; duæ A D, D E duabus C D, D E æquales sunt, altera alteri; et angulus A D E æqualis angulo C D E, rectus enim uterque est; ergo et basis A E basi E C est [r] æqualis. Sed ostensa est A E æqualis E B; quare et B E ipsi E C est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ A E, E B, E C, inter se æquales sunt. Centro igitur E, intervallo autem unâ ipsarum A E, E B, E C, circulus descriptus etiam per reliqua [s] transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. Sed et illud constat, segmentum A B C semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter, et si angulus A B D sit æqualis angulo B A D; recta A D utrique ipsarum B D, D C æqualis erit; tres igitur rectæ lineæ A D, D B, D C inter se æquales erunt; quapropter erit D circuli descripti centrum, et segmentum A B C semicirculus. Si vero angulus A B D minor sit angulo B A D; constituatur ad rectam lineam B A, et ad punctum in eâ datum A, angulo A B D æqualis angulus B A E intra segmentum A B C; erit E centrum in ipsâ D B, atque erit A B C segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus segmentum est. *Q. E. F.*

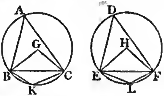
[p] 23. primi.
[q] 6. primi.
[r] 4. primi.
[s] 9. hujus.

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

*In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.*

Sint æquales circuli A B C, D E F, et in ipsis æquales anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico B A C circumferentiam circumferentiæ E D F æqualem esse; jungantur enim B C,

B C, E F. Quoniam æquales ſunt A B C, D E F circuli, erunt et quæ ex centris æquales[t]; duæ igitur B G, G C duabus E H, H F æquales ſunt: et angulus ad G æqualis angulo ad H; ergo et baſis B C baſi E F eſt [u] æqualis. Rurſus quoniam æqualis eſt angulus ad A angulo ad D, ſegmentum B A C ſimile [v] erit ſegmento E D F: et ſunt ſuper æqualibus rectis lineis B C, E F. Segmentorum autem ſimilium, baſibus æqualibus inſiſtentium, circumferentiæ æquales ſunt [w]. Æquales ſunt igitur circumferentiæ B A C, E D F.




[t] Def. 1.

[u] 4. primi.

[v] Def. 11.

[w] Cor. 24. hujus.

Dico inſuper circumferentias B K C, E L F inter ſe æquales. Sumatur enim in circumferentia B K C punctum quodvis K, et in E L F punctum quodvis L. Jungantur B K, C K, E L, F L. Quadrilateri A B K C circulo inſcripti anguli duo oppoſiti B A C, B K C ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales [x]. Simili ratione, quadrilateri D E L F anguli duo oppoſiti E D F, E L F ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales. Duo igitur B A C, B K C ſimul ſumpti duobus E D F, E L F ſimul ſumptis ſunt æquales. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis eſt [y]. Reliquus igitur B K C reliquo E L F æqualis erit. Similia igitur ſunt ſegmenta B K C, E L F. Sed rectis æqualibus B C, E F inſiſtunt. Circumferentias igitur B K C, E L F æquales habent. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. *Q. E. D.*

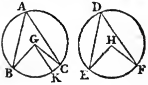
[x] 22. hujus.

[y] ex hyp.

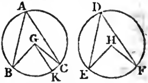
## PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

*In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis, inter ſe æquales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.*

In æqualibus enim circulis A B C, D E F, æqualibus circumferentiis B C, E F inſiſtant anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias vero B A C, E D F. Dico angulum B G C angulo E H F, et angulum B A C angulo E D F æqualem eſſe.



esse. Si quidem inæquales sint anguli B G C, E H F; alter ipsorum erit major. Sit major B G C, et constituatur ad rectam lineam B G, et ad punctum in ipsa G, an-




[y] 23. primi. gulo E H F æqualis [y] angulus B G K. Æquales autem

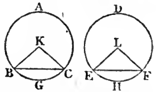
[z] 26. hujus. anguli æqualibus insistunt [z] circumferentiis, quando ad centra fuerint; ergo circumferentia B K æqualis est circumferentiæ E F. Sed circumferentia E F æqualis est ipsi B C; ergo et B K ipsi B C est æqualis, minor majori; quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus B G C angulo E H F: ergo est æqualis. Atque est anguli quidem B G C dimidium angulus, qui ad A; anguli vero E H F dimidium qui ad D; angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis, inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Q. E. D.*

[XXVIII.]

## PROP. XXVIII. THEOR.

*In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.*

Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales rectæ lineæ B C, E F, quæ circumferentias quidem B A C, E D F majores auferant, circumferentias vero B G C, E H F minores. Dico circumferentiam B A C majorem majori circumferentiæ E D F, et minorem circumferentiam B G C minori E H F æqualem esse.




[a] 1. hujus. Sumantur enim centra [a] circulorum K, L; junganturque B K, K C, E L, L F. Quoniam circuli æquales sunt, erunt

[b] Def. 1. et quæ ex centris æquales [b]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duabus E L, L F; et basis B C æqualis est basi

[c] 8. primi. E F; ergo angulus B K C angulo E L F est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis,

[d] 26. hujus. quando ad centra fuerint [d]; quare circumferentia B G C æqualis est circumferentiæ E H F. Sed et totus A B C circulus toti D E F est æqualis; reliqua igitur circumferentia

ferentia B A C reliquæ E D F æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. *Q. E. D.*

## PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

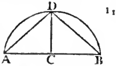
*In æqualibus circulis, æquales sunt rectæ lineæ quæ circumferentias æquales subtendunt.*

Sint æquales circuli A B C, D E F; et in ipsis æquales assumantur circumferentiæ B G C, E H F; et B C, E F jungantur. Dico rectam lineam B C rectæ E F æqualem esse. Sumantur enim centra [e] circulorum K, L; et jungantur B K, K C, E L, L F. Quoniam igitur circumferentia B G C est æqualis circumferentiæ E H F, erit et angulus B K C angulo E L F æqualis [f]; et quoniam circuli A B C, D E F sunt æquales, et quæ ex centris æquales erunt [g]; duæ igitur B K, K C sunt æquales duobus E L, L F; et æquales angulos continent; quare basis B C, basi E F est [h] æqualis. In æqualibus igitur circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. *Q. E. D.* Vide figur. Prop. præcedentis. [e] 1. hujus. [f] 27. hujus. [g] Def. 1. [h] 4. primi.

## PROP. XXX. PROBL. [XXX.]

*Datam circumferentiam bifariam secare.*

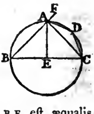
Sit data circumferentia A D B. Oportet A D B circumferentiam bifariam secare. Jungatur A B, et in C bifariam [1] secetur. A puncto autem C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C D; et jungantur A D, D B. Quoniam igitur A C est æqualis C B, communis autem C D; duæ A C, C D duabus B C, C D æquales sunt; et angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque est: ergo basis A D, basi B D est [k] æqualis. Æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales [l] auferunt. Quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. *Q. E. F.* [1] 10. primi. [k] 4. primi. [l] 28. hujus.



[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

*In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto; et qui in minori, major recto: et inſuper majoris quidem ſegmenti angulus, recto major eſt, minoris vero ſegmenti angulus, recto minor.*

Sit circulus A B C D, cujus diameter B C, centrum autem E; et jungantur B A, A C, A D, D C. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo B A C, rectum eſſe; qui vero in ſegmento A B C, quod majus eſt ſemicirculo, videlicet angulum A B C, minorem eſſe recto; et qui eſt in ſegmento A D C, quod minus eſt ſemicirculo, hoc eſt, angulum A D C, recto majorem. Jungatur A E, et B A ad F producatur. Itaque quoniam B E eſt æqualis




[l] 5. primi. E A, erit et angulus E A B, angulo E B A æqualis [l]. Rurſus quoniam A E eſt æqualis E C, et angulus A C E angulo C A E æqualis [l] erit; totus igitur angulus B A C eſt æqualis duobus A B C, A C B angulis. Eſt autem et angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C,

[m] 32. primi. A C B æqualis [m]; angulus igitur B A C eſt æqualis angulo F A C; ac propterea uterque ipſorum rectus [n].

[n] Def. 10. primi. Quare in ſemicirculo B A C angulus B A C rectus eſt. Et quoniam trianguli A B C duo anguli A B C, B A C duobus

[o] 17. primi. rectis ſunt [o] minores, rectus autem B A C; erit A B C angulus recto minor, atque eſt in ſegmento A B C, quod majus eſt ſemicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum ſit A B C D, quadrilaterorum vero, qui in circulis deſcri-

[p] 22. hujus. buntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint [p] æquales; erunt A B C, A D C anguli æquales duobus rectis, et angulus A B C minor eſt recto, reliquus igitur A D C recto major erit, atque eſt in ſegmento A D C, quod minus eſt ſemicirculo. Dico præterea majoris ſegmenti angulum, qui continetur A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C, recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentiâ A D C et rectâ lineâ A C, recto minorem. Quod quidem perſpicue apparet; quoniam angulus, qui rectis lineis B A, A C continetur, rectus eſt, erit et contentus A B C circumferentiâ et rectâ lineâ A C recto major. Rurſus quoniam angulus, contentus rectis lineis

C A,

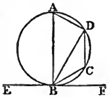
C A, A F, rectus est, erit qui continetur rectâ lineâ C A, et A D C circumferentiâ, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto: et insuper majoris quidem segmenti angulus, recto major est, minoris vero, recto minor. *Q. E. D.*

*Cor.* Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quod et qui deinceps est, iisdem est æqualis. Quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt [q]. [q] Def. 10. primi.

## PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

*Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt.*

Circulum enim A B C D contingat quædam recta linea E F in B, et a puncto B ad circulum A B C D ducatur recta linea B D ipsum utcunque secans. Dico angulos, quos B D cum E F contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est, angulum F B D esse æqualem angulo, qui constituitur in D A B segmento; angulum vero D B E æqualem angulo, qui in segmento D C B constituitur. Ducatur enim a puncto B ipsi E F ad rectos [r] angulos B A; et in circumferentiâ B D sumatur [r] quodvis punctum C; junganturque A D, D C, C B. Quoniam igitur circulum A B C D contingit quædam recta linea E F in puncto B; et a contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est B A, erit in ipsâ B A centrum [s] A B C D circuli. Quare B A ejusdem circuli diameter est, et angulus A D B in semicirculo est [t] rectus. Reliqui igitur anguli B A D, A B D uni recto [u] æquales sunt. Sed et A B F est rectus; ergo angulus A B F æqualis est angulis B A D, A B D. Communis auferatur A B D. Reliquus igitur D B F ei, qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo B A D, est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est A B C D, et anguli ejus oppositi æquales [w] sunt duobus rectis; erunt [w]



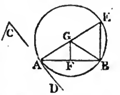

[r] 11. primi. [s] 19. hujus. [t] 31. hujus. [u] 32. primi. [w] 22. hujus.

D B F, D B E anguli angulis B A D, B C D æquales; quorum D B F oftenfus eft æqualis ipfi B A D. Ergo reliquus D B E ipfi D C B, ei fcilicet, qui in alterno circuli fegmento D C B conftituitur, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a contactu vero in circulum ducatur recta linea ipfum fecans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli fegmentis confiftunt. *Q. E. D.*

[XXXIII.]

## PROP. XXXIII. PROBL.

*Super datâ rectâ lineâ defcribere fegmentum circuli, quod fufcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.*

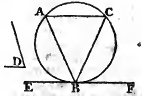



Sit data recta linea A B, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. Itaque oportet fuper datâ rectâ lineâ A B defcribere fegmentum circuli, quod fufcipiat angulum æqualem angulo, qui eft ad C. Ad rectam lineam A B, et ad punctum in eâ datum A, conftituatur angulus B A D an-
[x] 23. primi. gulo, qui eft ad C, æqualis [x]; et
[y] 11. primi. a puncto A ipfi A D ad rectos angulos [y] ducatur A E.
[z] 10. primi. Secetur autem A B bifariam [z] in F; atque a puncto F ducatur F G ad rectos angulos ipfi A B; et G B jungatur. Quoniam igitur A F eft æqualis F B, communis autem F G; duæ A F, F G duabus B F, F G æquales funt; et angulus A F G æqualis angulo B F G. Ergo bafis A G
[a] 4. primi. bafi G B eft [a] æqualis. Itaque centro G, intervallo autem A G, circulus defcriptus tranfibit etiam per B. Defcribatur, et fit A B E; circumferentiæ autem A B E recta A G producta iterum in E occurrat, jungaturque E B. Quoniam igitur ab extremitate diametri A E, et a puncto A, ipfi A E ad rectos angulos ducta eft A D; ipfa A D cir-
[b] Cor. 16. hujus. culum [b] continget. Et quoniam circulum A B E contingit quædam recta linea A D, et a contactu qui eft ad A, in circulum A B E ducta eft recta linea A B; erit angulus
[c] 32. hujus. D A B æqualis [c] angulo, qui in alterno circuli fegmento conftituitur, videlicet ipfi A E B. Sed angulus D A B angulo ad C eft æqualis; ergo et angulus ad C angulo A E B æqualis erit. Super datâ igitur rectâ lineâ A B, fegmentum circuli defcriptum eft A E B, fufcipiens angulum A E B dato angulo, qui eft ad C, æqualem. *Q. E. F.*

PROP.

## PROP. XXXIV. PROBL. [XXXIV.]

*A dato circulo ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum, dato rectilineo æqualem.*

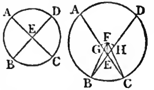



Sit datus circulus A B C, datus autem angulus rectilineus, qui ad D. Oportet a circulo A B C ſegmentum abſcindere, quod ſuſcipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur [d] recta linea E F circulum A B C in puncto B contingens; et ad rectam lineam B F, et ad punctum in eâ B, conſtituatur angulus F B C angulo, qui eſt ad D, æqualis [e]. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea E F in B puncto, et a contactu B ducta eſt B C, erit angulus F B C æqualis [f] ei, qui in alterno circuli ſegmento B A C conſtituitur. Sed F B C angulus angulo, qui ad D, eſt æqualis; ergo et angulus in ſegmento B A C angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo A B C abſciſſum eſt ſegmentum quoddam B A C, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo, qui eſt ad D, æqualem. *Q. E. F.*

[d] 17. hujus.
[e] 23. primi.
[f] 32. hujus.

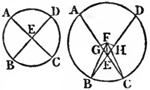
## PROP. XXXV. THEOR. [XXXV.]

*Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum, ſub ſegmentis unius contentum, æquale eſt ei, quod ſub alterius ſegmentis continetur, rectangulo.*




In circulo enim A B C D, duæ rectæ lineæ A C, B D ſeſe mutuo in puncto E ſecent. Dico rectangulum, contentum ſub A E, E C, æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, B D per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum A B C D circuli; manifeſtum eſt, æqualibus exiſtentibus A E, E C, D E, E B, et rectangulum contentum ſub A E, E C æquale eſſe ei, quod ſub D E, E B continetur. Si A C, D B non tranſeant per centrum, ſumatur centrum circuli A B C D, quod ſit F; et ab F ad rectas lineas A C, D B perpendiculares ducantur F G, F H: junganturque F B, F C, F E. Quoniam igitur recta quædam linea G F, per centrum ducta, rectam lineam quandam

quandam A C, non ductam per centrum, ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit [g]; quare A G ipsi G C est æqualis. Et quoniam recta linea A C secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E; crit rectangulum sub A E, E C contentum,




[g] 3. hujus.

una cum ipsius E G quadrato [h], æquale quadrato ex G C; commune addatur ex G F quadratum. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum iis, quæ ex E G, G F, quadratis, æquale est quadratis ex C G, G F; sed quadratis, quæ ex E G, G F, æquale [i] est quadratum ex F E: quadratis vero ex C G, G F æquale est [i], quod ex F C fit, quadratum. Rectangulum igitur sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F C. Est autem C F æqualis F B; ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex E F, æquale est ei, quod ex F B fit, quadrato. Eâdem ratione et rectangulum sub D E, E B, una cum quadrato ex F E, æquale est quadrato ex F B. Ostensum autem est et rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale ei, quod fit ex F B, quadrato. Ergo rectangulum sub A E, E C, una cum quadrato ex F E, æquale est rectangulo sub D E, E B, una cum quadrato ex F E; commune auferatur ex F E quadratum; reliquum igitur rectangulum sub A E, E C, reliquo sub D E, E B rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum, sub segmentis unius contentum, æquale est ei, quod sub alterius segmentis continetur. *Q. E. D.*

[h] 5. secundi.

[i] 47. primi.

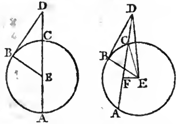
{XXXVI}

## PROP. XXXVI. THEOR.

*Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod sub totâ secante, et exterius assumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, æquale erit ei, quod a contingente fit, quadrato.*

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; et D C A quidem circulum A B C secet; D B vero contingat. Dico rectangulum sub A D, D C quadrato

drato, quod fit ex D B, æquale eſſe. Namque D C A vel tranſit per centrum, vel non tranſit. Primum tranſeat D A per centrum circuli A B C, quod ſit E; et E B jungatur. Erit angulus E B D rectus [k]; itaque quoniam recta linea A C biſariam ſecta eſt in E, et ipſi adjicitur C D, rectangulum ſub A D, D C una cum quadrato ex E C, æquale [l] erit ei, quod fit ex E D, quadrato; æqualis autem eſt C E ipſi E B; ergo rectangulum ſub A D, D C una cum quadrato, quod ex E B, æquale eſt quadrato ex E D; ſed quadratum ex E D eſt æquale quadratis [m] ipſarum E B, B D; rectus enim angulus eſt E B D. Rectangulum igitur ſub A D, D C, una cum quadrato ex E B, æquale eſt ipſarum E B, B D quadratis; commune auferatur quadratum, quod ex E B; ergo reliquum ſub A D, D C rectangulum quadrato, quod fit a contingente D B, æquale erit. Secundo D C A non tranſeat per centrum A B C circuli: ſumaturque [n] centrum E, et ad A C perpendicularis agatur E F, et jungantur E B, E C, E D. Rectus igitur eſt E F D angulus. Et quoniam recta linea quædam E F per centrum ducta, rectam lineam quandam A C, non ductam per centrum, ad rectos angulos ſecat, et biſariam ipſam ſecabit [o]; quare A F ipſi F C eſt æqualis. Rurſus quoniam recta linea A C biſariam ſecta eſt in F, atque ipſi adjicitur C D, erit rectangulum ſub A D, D C, una cum quadrato ex F C, æquale [l] quadrato quod ex F D; commune apponatur quod ex F E quadratum; rectangulum igitur ſub A D, D C una cum quadratis ex F C, F E eſt æquale quadratis ex D F, F E. Sed quadratis quidem ex D F, F E æquale eſt [m] ex D E quadratum; etenim rectus eſt angulus E F D: quadratis vero ex C F, F E æquale eſt [m] quadratum ex C E. Ergo rectangulum ſub A D, D C, una cum quadrato quod ex C E, eſt æquale quadrato ex E D; æqualis autem eſt C E ipſi E B; rectangulum igitur ſub A D, D C, una cum quadrato ex E B, æquale eſt ex E D quadrato. Sed quadrato ex E D æqualia ſunt quadrata [m] ex E B, B D; ſiquidem rectus eſt angulus E B D. Ergo




[k] 18. hujus.
[l] 6. ſecundi.
[m] 47. primi.
[n] 1. hujus.
[o] 3. hujus.

Ergo rectangulum ſub A D, D C, una cum quadrato ex E B æquale eſt eis, quæ ex E B, B D fiunt, quadratis; commune auferatur quadratum ex E B; reliquum igitur ſub A D, D C rectangulum quadrato, quod fit ex D B, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, &c. *Q. E. D.*

*Cor.* 1.* (Clavii) Ex hâc Propoſitione xxxvi. manifeſtum eſt, ſi a puncto quovis extra circulum plures lineæ rectæ, circulum ſecantes, ducantur; rectangula, comprehenſa ſub totis lineis et partibus exterioribus, inter ſe eſſe æqualia.

*Cor.* 2.* (Clavii) Conſtat etiam duas rectas, ab eodem puncto ductas, quæ circulum contingant, inter ſe eſſe æquales.

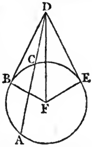
*Cor.* 3.* (Clavii) Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto duas tantum rectas duci poſſe, quæ circulum contingant.

[XXXVII.]

## PROP. XXXVII. THEOR.

*Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat: ſit autem, quod ſub totâ ſecante, et exterius aſſumptâ inter punctum et convexam circumferentiam, continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente ſit, quadrato; incidens linea circulum continget.*

Extra circulum enim A B C ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A, D B; D C A quidem circulum ſecet, D B vero incidat: ſitque rectangulum ſub A D, D C æquale quadrato, quod fit ex D B. Dico ipſam D B circulum A B C contingere.

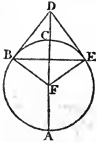



[p 17. hujus.] Ducatur enim recta linea D E [p] contingens circulum A B C; et ſumatur circuli A B C centrum, quod ſit F; junganturque F E, F B, F D; ergo angulus [q 18. hujus.] F E D rectus eſt[q]. Et quoniam D E circulum A B C contingit, ſecat autem D C A; [r Ex antecedente.] rectangulum ſub A D, D C æquale erit[r] quadrato ex D E; ſed rectangulum ſub A D, D C ponitur æquale quadrato ex

ex D B; quadratum igitur, quod ex D E, quadrato ex D B æquale erit; ac propterea linea D E erit ipsi D B æqualis; est autem et F E æqualis F B. Duæ igitur D E, E F duabus D B, B F æquales sunt; et basis communis F D; angulus igitur D E F est æqualis angulo D B F; rectus autem est D E F, ergo et D B F est rectus; atque est F B producta diameter. Quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, [a] circulum contingit; [a] Cor. 16. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. Si igitur hujus. extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. *Q. E. D.*

*Cor.* 1. * (Clavii) Si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam extra circulum in peripheriam incidant; earum autem una circulum contingat; et altera eundem continget.

*Cor.* 2. * Si a puncto quopiam D extra circulum duæ rectæ ducantur, D B, D E, circulum in punctis B, E contingentes; recta B E, contactus jungens, peripheriam integram in partes inæquales B C E, B A E dividit; quarum minor est B C E, quæ angulum B D E convexa respicit; major B A E, quæ cava angulo obversa est.

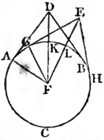



Circuli B A E sumatur centrum F. Juncta F D peripheriæ in punctis A, C occurrat. Jungantur F B, F E. Propter angulum F B D rectum, angulus B F D recto minor erit. Duo autem B F D, B F A simul duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur B F A recto major. Multo major igitur quam B F C. Arcus igitur B A arcu B C major. Simili modo ostendetur arcus E A arcu E C major. Totus igitur B A E, ex duobus B A, E A compositus, toto B C E major, ex duobus B C, E C composito.

*Cor.* 3. * Si a punctis duobus extra circulum, distantiis æqualibus a centro remotis, rectæ ducantur, circulum contingentes; arcus, contingentibus intercepti, æquales erunt, convexus convexo, cavus cavo.

Extra circulum A C B, cujus centrum F, sint puncta D, E, distantiis æqualibus a centro F remota. A puncto D ducantur D A, D B, quæ in punctis A, B; et a puncto

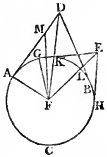
a puncto E ducantur E G, E H, quæ in punctis G, H, circulum contingant. Junctæ autem F D, F E, peripheriæ circuli, quâ parte convexa respicit puncta D, E, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, A C B arcubus G L H, G C H æquales: convexum A K B convexo G L H; cavum A C B, cavo G C H. Jungantur enim F A, F G. Anguli F A D, F G E sunt recti. Sed rectæ F A, F D rectis F G, F E, singulæ singulis, æquales. Quare in triangulis D A F, E G F latus




[a] 47. primi. D A, lateri E G æquale [a]. Latera igitur D F, F A lateribus E F, F G, singula singulis, æqualia; et basis D A basi E G æqualis. Quare angulus D F A angulo E F G
[b] 8. primi. æqualis [b]. Arcus igitur A K arcui G L æqualis. Simili modo ostendetur arcus B K æqualis arcui H L. Totus igitur A K B, ex duobus A K, B K compositus, æqualis toti G L H, ex duobus G L, H L composito. Arcus autem A K B, A C B simul integram circuli peripheriam complent; quam similiter complent G L H, G C H. Duo igitur A K B, A C B, simul sumpti, duobus G L H, G C H, simul sumptis, æquales sunt. Ablatisque A K B, G L H æqualibus, relinquentur A C B, G C H inter se æquales. *Q. E. D.*

*Cor.* 4. * Si a punctis duobus extra circulum, distantiis inæqualibus a centro remotis, rectæ ducantur circulum contingentes; arcus inæquales intercipient; et convexum minorem, majorem vero cavum, quæ a puncto propiore ductæ fuerint.

Extra circulum ACB, cujus centrum sit F, sint puncta duo D, E, distantiis inæqualibus a centro remota. Hoc est, junctæ F D, F E inæquales sint. Inæqualium autem altera major erit. Sit F D major. Ducantur a puncto D duæ rectæ D A, D B, quæ in punctis A, B, a puncto autem E, duæ E G, E H, quæ in punctis G, H circulum contingant. Rectæ autem F D, F E circuli peripheriæ, quâ parte puncta D, E convexa respicit, in punctis K, L occurrant. Dico arcus A K B, G L H, necnon A C B, G C H,



G C H esse inæquales, et arcum G L H arcu A K B minorem, arcum autem G C H arcu A C B majorem. Jungantur enim F A, F G; propter angulum ad A rectum, quadratum ex F D duobus quadratis ex F A, A D est æquale [w]. Similiter propter angulum ad G rectum, [w] 47. primi. quadratum ex F E duobus ex F G, G E est æquale. Sed quadratum ex F E minus erit quadrato ex F D, propter rectam F E rectâ F D [x] minorem. Duo igitur ex F G, [x] ex hyp. G E duobus ex F A, A D sunt minora. Auferantur æqualia ex rectis æqualibus F G, F A; jam reliquum ex E G quadratum reliquo ex D A minus erit. Recta igitur E G rectâ D A minor. In A D igitur a puncto A capiatur A M illi E G æqualis. Minor erit A M quam A D, et punctum M duobus A, D necessario interjacebit. Quapropter, si jungatur F M, angulus A F M angulo A F D minor erit. Sed in triangulis F A M, F G E, propter latera F A, A M, lateribus F G, G E, singula singulis, æqualia, et angulos ad A, G æquales (etenim uterque rectus), anguli A F M, E F G erunt inter se æquales [y]. Angulus [y] 4. primi. igitur G F E angulo A F D minor. Quare et arcus G L arcu A K minor. Simili modo ostendetur arcus H L arcu B K minor. Totus igitur G L H toto A K B minor. Et qui reliquus fuerit ex integrâ circuli peripheriâ, ablato G L H, major eo, qui reliquus fuerit, ablato A K B. Arcus nempe G C H arcu A C B major. *Q. E. D.*

*Cor.* 5. * Recta, quæ centrum circuli et contingentium occursum jungit, arcum contingentibus interceptum, necnon rectam contactus jungentem, bifariam dividit.

*Cor.* 6. * Recta, quæ arcum circuli, duabus contingentibus interceptum, in medio ipsius puncto contingit, rectæ, quæ contingentium primo positarum contactus jungit, parallela est.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER QUARTUS.

### DEFINITIONES.

#### Definitio I.

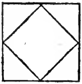


FIGURA rectilinea in figurâ rectilineâ deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus unumquodque latus ejus, in quâ deſcribitur, contingit.

#### II.

Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ, unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

#### III.

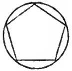


Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

#### IV.

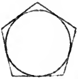


Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

V.

Circulus similiter in figurâ rectilineâ describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus, in quâ describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam describitur, contingit.

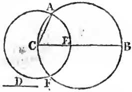
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentiâ fuerint.

[I.] PROPOSITIO I. PROBLEMA.

*In dato circulo, datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.*

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea, non major circuli diametro, D. Oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C. Si quidem igitur B C sit æqualis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in circulo A B C aptata est B C rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, major est B C quam D; ponatur igitur [a] ipsi D æqualis C E; et centro quidem C, intervallo autem C E, circulus describatur A E F, qui circulo A B C in A occurrat; et C A jungatur. Itaque quoniam punctum C centrum est A E F circuli; crit C A ipsi C E æqualis; sed D est æqualis C E. Ergo et D ipsi A C æqualis erit. In dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est A C. *Q. E. F.*




[a] 3. primi.

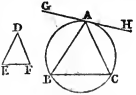
[II.] PROP. II. PROBL.

*In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.*

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet in A B C circulo describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Ducatur recta linea G A H contingens [b] circulum A B C in puncto A; et ad rectam lineam A H, et ad punctum in eâ A, angulo D E F æqualis

[b] 17. tertii.

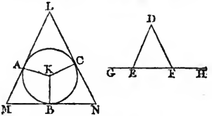
æqualis [c] angulus conſtituatur H A C. Rurſus ad rectam [c 23. primi.] lineam A G, et ad punctum in ipſâ A, angulo D F E æqualis [c] conſtituatur angulus G A B; et B C jungatur. Quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta H A G; a contactu autem in circulum ducta eſt A C; erit H A C angulus æqualis [d] ei, qui in alterno circuli ſegmento con- [d 32. tertii.] ſiſtit, videlicet ipſi A B C; ſed H A C angulus æqualis eſt angulo D E F, ergo et angulus A B C angulo D E F eſt æqualis. Eâdem ratione et angulus A C B eſt æqualis angulo D F E. Reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis [e] erit. Ergo triangulum A B C trangulo [e 2. Cor. 32. primi.] D E F eſt æquiangulum, et deſcriptum eſt in circulo A B C. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*



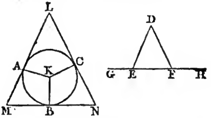

## PROP. III. PROBL. [III.]

*Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcribere.*

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. Oportet circa circulum A B C deſcribere triangulum triangulo D E F æquiangulum. Protrahatur E F ex utrâque parte ad puncta H, G, et ſumatur circuli A B C centrum K; et recta linea K B utcunque ducatur:




conſtituaturque ad rectam lineam K B, et ad punctum in eâ K, angulo quidem D E G æqualis [f], angulus B K A, [f 23. primi.] angulo autem D F H æqualis, [f] angulus B K C; et per A, B, C puncta ducantur rectæ lineæ L A M, M B N, N C L circulum A B C contingentes. Jam cum rectæ A K, B K



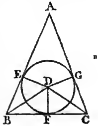

angulo A K B sibi invicem inclinantur, angulo D E G æquali, directa non est linea A K B [g]. Rectæ igitur A M, N B, quæ circulum in punctis A, B, contingunt, ex diametro non oppositis, non erunt inter se parallelæ [h]. Rectæ igitur A M, N B sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto M. Similiter propter angulum B K C angulo D F H æqualem [i] directa non est linea C K B. Rectæ igitur M B, N C sibi mutuo occurrent. Occurrant in puncto N. Quoniam rectæ M A, M B N, N C circulum A B C in punctis A, B, C contingunt, a centro autem K ad puncta A, B, C ducuntur rectæ K A, K B, K C; erunt anguli ad puncta A, B, C recti. In quadrilatero igitur A M B K, cujus anguli quatuor quatuor rectis sunt æquales (per Theorema primum eorum, quæ Prop. 32. Lib. i. subjunxit Keillius) cum duo K A M, K B M sint recti; erunt reliqui duo A K B, A M B duobus rectis æquales. Duo autem D E G, D E F simul sumpti æquales sunt duobus rectis. Duo igitur A K B, A M B simul sumpti duobus D E G, D E F sunt æquales. Horum autem A K B ipsi D E G est æqualis. Quare et reliquus A M B reliquo D E F æqualis erit. Similiter ostendetur angulus C N B angulo D F E æqualis. Duo igitur A M B, C N M simul sumpti duobus D E F, D F E simul sumptis sunt æquales. Duo autem D E F, D F E duobus rectis sunt minores [k]. Duo igitur A M B, C N B duobus rectis sunt minores. Rectæ igitur M A, N C productæ inter se convenient [l]. Conveniant in puncto L. Triangulum igitur est figura L M N, et propter angulos duos L M N, L N M duobus D E F, D F E æquales (id enim ostensum) reliquus M L N reliquo E D F æqualis est. Æquiangulum igitur est triangulum L M N triangulo D E F, et circulo A B C circumscriptum est. *Q. E. F.*

[g] 13. primi.
[h] 2. Cor. 18. tertii.
[i] Per construct.
[k] 17. primi.
[l] Ax. 12. primi.

PROP.

## PROP. IV. PROBL. [IV.]

*In dato triangulo circulum describere.*




Sit datum triangulum A B C. Oportet in triangulo A B C circulum describere. Secentur[m] anguli A B C, B C A bifariam rectis lineis B D, C D, quæ conveniant inter se in D puncto; et a puncto D ad rectas lineas A B, B C, C A perpendiculares [n] ducantur D E, D F, D G. Quoniam angulus E B D est æqualis angulo F B D, est autem et rectus B E D recto B F D æqualis; duo triangula E B D, D B F duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; utrique scilicet commune B D, quod uni æqualium angulorum subtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [o] habebunt, atque erit D E æqualis D F. Et eâdem ratione D G æqualis D F. Ergo et D E ipsi D G est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ D E, D F, D G inter se æquales sunt; quare centro D, intervallo autem unius ipsarum D E, D F, D G, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C A continget; propterea quod recti sunt ad E, F, G anguli. Si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod est absurdum [p]. Non igitur centro D, intervallo autem unius [p] ipsarum D E, D F, D G, circulus descriptus secabit rectas lineas A B, B C, C A, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo A B C. In dato igitur triangulo A B C circulus E F G descriptus est. Q. E. F.

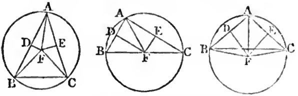
[m] 9. primi.
[n] 12. primi.
[o] 26. primi.
[p] 16. tertii.

## PROP. V. PROBL. [V.]

*Circa datum triangulum circulum describere.*

Sit datum triangulum A B C. Oportet circa datum triangulum A B C circulum describere. Secentur A B, A C bifariam [q] in D, E punctis; et a punctis D, E ipsis [q] A B, A C ad rectos angulos [r] ducantur D F, E F, quæ [r] quidem vel intra triangulum A B C convenient, vel in rectâ lineâ B C, vel extra ipsam. Conveniant primo intra triangulum in puncto F; et B F, F C, F A jungantur. Quoniam igitur A D est æqualis D B, communis autem,

[q] 10. primi.
[r] 11. primi.




[a] 4. primi. et ad rectos angulos, D F; erit basis A F basi F B æqualis [a]. Similiter ostendetur et C F æqualis F A. Ergo et B F est æqualis F C. Tres igitur F A, F B, F C inter se æquales sunt. Quare centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C. Secundo, D F, E F conveniant in rectâ lineâ B C, in puncto F, ut in secundâ figurâ; et A F jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum A B C descripti. Postremo D F, E F conveniant extra triangulum A B C rursus in F puncto, ut in tertiâ figurâ; et jungantur A F, F B, F C. Et quoniam rursus A D est æqualis D B, communis autem, et ad rectos angulos, D F; basis A F basi F B æqualis erit. Similiter demonstrabimus et C F ipsi F A æqualem esse. Quare et B F est æqualis F C. Rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum F A, F B, F C, circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum A B C descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*

*Cor.* Si triangulum sit rectangulum, centrum circuli cadet in latus, angulo recto oppositum. Si acutangulum, cadet centrum intra triangulum; si obtusangulum, cadet extra [b].

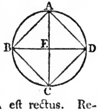
[b] 31. tertii.

[VI.] PROP. VI. PROBL.

*In dato circulo quadratum describere.*

Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C, B D; et A B, B C, C D, D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, et ad

ad rectos angulos, E A; erit basis B A æqualis [u] basi A D. [u] 4. primi.
Et eâdem ratione utraque ipsarum B C, C D utrique B A, A D est æqualis; æquilaterum igitur est A B C D quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semicirculus; quare angulus B A D rectus [w] est. Et eâdem ratione unusquisque ipsorum A B C, B C D, C D A est rectus. Rectangulum igitur est A B C D quadrilaterum. Ostensum autem est et æquilaterum esse. Ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo A B C D. In dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. *Q. E. F.*

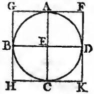



[w] 31. tertii.

## PROP. VII. PROBL. [VII.]

*Circa datum circulum quadratum describere.*

Sit datus circulus A B C D. Oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C, B D ad rectos inter se angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum A B C D contingentes [x] F G, G H, H K, K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, a centro autem E ad contactum, qui est ad A, ducitur E A; erunt [y] anguli ad A recti. Eâdem ratione, et anguli ad puncta B, C, D, recti sunt. Et quoniam angulus A E B rectus est, est autem et rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela [z]. Eâdem ratione, et A C parallela est F K. Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum G F, H K ipsi B E D parallelam esse. Quare et G F est parallela H K. Parallelogramma igitur sunt G K, G C, A K, F B, B K, ac propterea G F quidem est [a] æqualis H K; G H vero ipsi [a] F K. Et quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum G H, F K est [a] æqualis; B D vero æqualis utrique G F, H K; et utraque G H, F K utrique G F, H K æqualis erit. Æquilaterum igitur est F G H K quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est G B E A, atque est rectus A E B angulus, et ipse A G B rectus erit. Similiter demonstrabimus



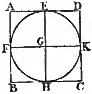

[x] 17. tertii.
[y] 18. tertii.
[z] 28. primi.
[a] 34. primi.

ſtrabimus angulos etiam ad puncta H, K, F, rectos eſſe. Rectangulum igitur eſt quadrilaterum F G H K. Demonſtratum autem eſt et æquilaterum. Ergo quadratum ſit neceſſe eſt, et deſcriptum eſt circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. *Q. E. F.*

[VIII.] PROP. VIII. PROBL.

*In dato quadrato circulum deſcribere.*

Sit datum quadratum A B C D. Oportet in quadrato A B C D circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum A B, A D, biſariam
[b] 10. primi. [b] in punctis F, E. Et per E quidem alterutri ipſarum A B, C D parallela
[c] 31. primi. [c] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [c] alterutri A D, B C. Parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum A K, K B, A H, H D, A G, G C, B G, G D; et latera ipſorum, quæ ex oppoſito,
[d] 34. primi. ſunt æqualia [d]. Et quoniam D A eſt æqualis A B; et ipſius quidem A D dimidium eſt A E, ipſius vero A B dimidium A F; erit A E ipſi A F æqualis; quare et oppoſita latera æqualia ſunt. Ergo F G eſt æqualis G E. Similiter demonſtrabimus et utramque ipſarum G H, G K utrique F G, G E æqualem eſſe. Quatuor igitur G E, G F, G H, G K inter ſe ſunt æquales. Itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; et rectas lineas A B, B C, C D, D A continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti ſunt. Si enim circulus ſecabit rectas lineas A B, B C, C D, D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos
[e] 16. tertii. ducitur, intra circulum cadet; quod [e] eſt abſurdum. Non igitur centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E, G F, G H, G K, circulus deſcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D A ſecabit. Quare ipſas neceſſario continget; atque erit deſcriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. *Q. E. F.*

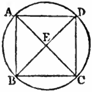



PROP.

## PROP. IX. PROBL. [IX.]

*Circa datum quadratum circulum describere.*

Sit datum quadratum A B C D. Oportet circa A B C D quadratum circulum describere. Junguntur A C, B D, quæ se invicem in puncto E secent. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A, A C duabus B A, A C æquales sunt; et basis D C æqualis basi B C. Angulus igitur D A C angulo B A C æqualis [f]. Angulus igitur D A B bifariam sectus est rectâ lineâ A C. Similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C, B C D, C D A rectis lineis A C, D B bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis, atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; et E A B angulus angulo E B A æqualis erit. Quare et latus E A lateri E B est [g] æquale. Similiter demonstrabimus et utramque rectarum linearum E C, E D utrique E B, E A æqualem esse. Ergo quatuor rectæ lineæ E A, E B, E C, E D inter se sunt æquales. Centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A, E B, E C, E D, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. Describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. *Q. E. F.*



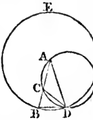

[f] 8. primi.

[g] 6. primi.

## PROP. X. PROBL. [X.]

*Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.*

Exponatur recta quædam linea A B, et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B, B C æquale [h] sit ei quod ex C A describitur quadrato; et centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur B D E; aptetur que in B D E circulo recta linea B D æqualis [i] ipsi A C, quæ non est major diametro circuli B D E. Junctâque D A, dico factum esse, quod fieri oportebat. Constitutum est enim triangulum isosceles B A D, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim B D, duplum reliqui B A D. Jungatur enim D C, et circa A D C triangulum [k] circulus A C D [k] describatur.

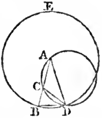



[h] 11. secundi.

[i] 1. hujus.

[k] 5. hujus.

describatur. Itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato, quod fit ex A C; æqualis autem est A C ipsi B D; erit sub A B, B C rectangulum quadrato ex B D æquale. Et quoniam extra circulum A C D sumptum est aliquod punctum B, et a puncto B in circulum A C D cadunt duæ rectæ lineæ B C A, B D, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub A B, B C æquale quadrato ex B D: recta linea B D circulum A C D[l] continget.




[l] 37. tertii.

Quoniam igitur B D contingit, et a contactu ad D ducta est D C; erit B D C angulus æqualis[m] ei, qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo D A C. Quod cum angulus B D C æqualis sit ipsi D A C, communis apponatur C D A; totus igitur B D A est æqualis duobus angulis C D A, D A C. Sed ipsis C D A, D A C exterior angulus B C D est[n] æqualis. Ergo et B D A æqualis est ipsi B C D. Sed B D A angulus est[o] æqualis angulo C B D, quoniam et latus A D lateri A B est æquale. Ergo et D B A ipsi B C D æqualis erit. Tres igitur anguli B D A, D B A, B C D inter se æquales sunt. Et quoniam angulus D B C æqualis est angulo B C D, et latus B D lateri D C est[p] æquale; sed B D ponitur æqualis ipsi C A. Ergo et C A est æqualis C D; quare et angulus C D A æqualis est angulo D A C. Anguli igitur C D A, D A C simul sumpti ipsius anguli D A C duplices sunt. Est autem et B C D angulus angulis C D A, D A C æqualis; ergo et B C D duplex est ipsius D A C. Sed B C D est æqualis alterutri ipsorum B D A, D B A; quare et uterque B D A, D B A ipsius D A B est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est A D B, habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. *Q. E. F.*

[m] 32. tertii.
[n] 32. primi.
[o] 5. primi.
[p] 6. primi.

## [XI.] PROP. XI. PROBL.

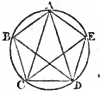
*In dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.*

Sit datus circulus A B C D E. Oportet in A B C D E circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles F G H, habens utrumque eorum, qui sunt ad basim G H, angulorum, duplum[q] anguli, qui est ad F; et describatur in circulo A B C D E triangulo F G H æquiangulum[r] triangulum A C D,

[q] 10. hujus.
[r] 2. hujus.

A C D; ita ut angulo quidem, qui est ad F, æqualis sit angulus C A D; utrique vero ipsorum, qui ad G, H, sit æqualis uterque ACD, CDA. Et uterque igitur ACD, CDA anguli CAD est duplus. Secetur uterque ipsorum ACD, C D A bifariam [t] rectis lineis C E, D B; et A B, B C, D E,




[t] 9. primi.

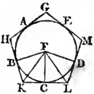
E A jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum A C D, C D A duplus est ipsius C A D, et secti sunt bifariam rectis lineis C E, D B, quinque anguli D A C, A C E, E C D, C D B, B D A inter se sunt æquales. Æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt [t]; [t] 26. tertii.
quinque igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E A æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias [u] æquales rectæ lineæ subtendunt. Ergo et quinque [u] 29. tertii.
rectæ lineæ A B, B C, C D, D E, E A inter se æquales sunt. Æquilaterum igitur est A B C D E pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia A B æqualis est circumferentiæ D E, communis apponatur B C D. Tota igitur A B C D circumferentia toti circumferentiæ E D C B est æqualis; et in circumferentiâ quidem A B C D insistit angulus A E D, in circumferentiâ vero E D C B insistit B A E. Ergo et B A E angulus est æqualis angulo A E D. Eâdem ratione et unusquisque angulorum A B C, B C D, C D E unicuique ipsorum B A E, A E D est æqualis. Æquiangulum igitur est A B C D E pentagonum: ostensum autem est et æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*

## PROP. XII. PROBL. [XII.]

*Circa datum circulum pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere.*

Sit datus circulus A B C D E. Oportet circa circulum A B C D E pentagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti [x] angulorum puncta esse A, B, C, D, E, ita ut circum- [x] 11. hujus.
ferentiæ A B, B C, C D, D E, E A sint æquales; et per puncta A, B, C, D, E ducantur [y] circulum contingentes [y] 17. tertii.
G H, H K, K L, L M, M G; et sumpto circuli A B C D E centro F, jungantur F B, F K, F C, F L, F D. Quoniam igitur

igitur recta linea K L contingit circulum A B C D E in puncto C, et a centro F ad contactum, qui est ad C, ducta est F C, erit F C ad ipsam K L perpendicularis[a]. Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C. Eâdem ratione et anguli, qui ad puncta B, D, recti sunt. Et quoniam rectus angulus est F C K, quadratum quod fit ex F K æquale[a] est quadratis ex F C, C K. Et ob eandem causam quadratis ex F B, B K æquale est ex F K quadratum. Quadrata igitur ex F C, C K quadratis ex F B, B K æqualia sunt; quorum, quod ex F C ei, quod ex F B, est æquale. Ergo reliquum, quod ex C K, reliquo, quod ex B K, æquale erit. Æqualis igitur est B K ipsi C K. Et quoniam F B est æqualis F C, communis autem F K; duæ B F, F K duabus C F, F K æquales sunt, et basis B K est æqualis basi K C; erit angulus [b]itaque B F K angulo K F C æqualis, angulus vero B K F angulo F K C. Duplus igitur est angulus B F C anguli K F C, et angulus B K C duplus ipsius F K C. Eâdem ratione, et angulus C F D anguli C F L est duplus; angulus vero C L D duplus anguli C L F. Et quoniam circumferentia B C circumferentiæ C D est æqualis, et angulus B F C angulo C F D æqualis erit[c]. Atque est angulus quidem B F C anguli K F C duplus; angulus vero D F C duplus ipsius L F C: æqualis igitur est angulus K F C angulo C F L. Itaque duo triangula sunt F K C, F L C, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est, F C: ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt[d], et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. Recta igitur linea K C est æqualis rectæ C L, et angulus F K C angulo F L C. Et quoniam K C est æqualis C L, erit K L ipsius K C dupla. Eâdem ratione, et H K ipsius B K dupla ostendetur. Rursus quoniam B K ostensa est æqualis ipsi K C, atque est K L quidem dupla K C, H K vero ipsius B K dupla; erit H K ipsi K L æqualis. Similiter et unaquæque ipsarum G H, G M, M L ostendetur æqualis utrique H K, K L. Æquilaterum igitur est G H K L M pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus F K C est æqualis angulo F L C; et ostensus est angulus H K L duplus ipsius F K C; ipsius vero F L C duplus



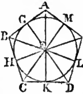

[a] 18. tertii.
[a] 47. primi.
[b] 8. primi.
[c] 27. tertii.
[d] 26. primi.

duplus K L M: erit et H K L angulus angulo K L M æqualis. Simili ratione oſtendetur et unuſquiſque ipſorum K H G, H G M, G M L utrique H K L, K L M æqualis. Quinque igitur anguli G H K, H K L, K L M, L M G, M G H inter ſe æquales ſunt. Ergo æquiangulum eſt G H K L M pentagonum. Oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe; et deſcriptum eſt circa A B C D E circulum. *Q. E. F.*

## PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

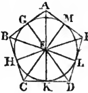
*In dato pentagono, quod æquilaterum et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.*

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet in A B C D E pentagono circulum deſcribere. Secetur uterque angulorum B C D, C D E bifariam [e] rectis lineis C F, D F; et a puncto F, in quo conveniunt inter ſe C F, D F, ducantur rectæ lineæ F B, F A, F E. Quoniam igitur B C eſt æqualis C D, communis autem C F; duæ B C, C F duabus D C, C F æquales ſunt, et angulus B C F eſt æqualis angulo D C F. Baſis igitur B F baſi F D eſt [f] æqualis, et B F C triangulum æquale triangulo D C F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus igitur C B F angulo C D F æqualis erit. Et quoniam angulus C D E anguli C D F eſt duplus, et angulus quidem C D E angulo A B C æqualis, angulus vero C D F angulo C B F æqualis; erit et C B A angulus duplus anguli C B F; ac propterea angulus A B F angulo C B F æqualis. Angulus igitur A B C bifariam ſectus eſt rectâ lineâ B F. Similiter demonſtrabitur unumquemque angulorum B A E, A E D rectis lineis A F, F E bifariam ſectum eſſe. A puncto F ad rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A ducantur [g] perpendiculares F G, F H, F K, F L, F M. Et quoniam angulus H C F eſt æqualis angulo K C F; eſt autem et rectus F H C recto F K C æqualis: duo triangula F H C, F K C duos angulos duobus angulis æquales habent, et unum latus uni lateri æquale; commune ſcilicet utriſque F C, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia [h] habebunt; atque erit perpendicularis F H perpendiculari




[e] 9. primi.
[f] 4. primi.
[g] 12. primi.
[h] 26. primi.

pendiculari F K æqualis. Similiter oſtendetur et unaquæque ipſarum F L, F M, F G æqualis utrique F H, F K. Quinque igitur rectæ lineæ F G, F H, F K, F L, F M inter ſe æquales ſunt. Quare centro F, intervallo autem unius ipſarum F G, F H, F K, F L, F M, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A continget; propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod abſurdum [1]eſſe oſtenſum eſt. Non igitur centro F, et intervallo uno ipſorum punctorum G, H, K, L, M, circulus deſcriptus rectas lineas A B, B C, C D, D E, E A ſecabit. Quare ipſas contingat neceſſe eſt. Deſcribatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono, quod eſt æquilaterum et æquiangulum, circulus deſcriptus eſt. *Q. E. F.*




[1] 16. tertii.

*Cor.* 1.* (Barrovii) Hinc ſi duo anguli proximi figuræ cujuſcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ a puncto concurſûs dividentium ad reliquos figuræ angulos ductæ, reliquos medios dividunt.

*Cor.* 2.* (Clavii) Si duo anguli proximi figuræ cujuſcunque æquilateræ et æquiangulæ medii dividantur; rectæ ex puncto concurſûs dividentium in latera figuræ ad perpendiculum deductæ, inter ſe æquales erunt.

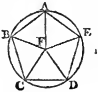
*Cor.* 3.* (Clavii) Eodem igitur modo in omni figurâ æquilaterâ et æquiangulâ circulus deſcribendus eſt.

## [XIV.] PROP. XIV. PROBL.

*Circa datum pentagonum, quod æquilaterum et æquiangulum ſit, circulum deſcribere.*

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum A B C D E. Oportet circa pentagonum A B C D E circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum B C D, C D E angulorum bifariam rectis lineis C F, F D; et a puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E ducantur F B, F A, F E. Et unuſquiſque angulorum C B A, B A E, A E D rectis lineis B F, F A, F E bifariam ſectus

[k] fectus erit. Et quoniam angulus B C D angulo C D E est[k] æqualis; atque est anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit et F C D angulus æqualis angulo F D C; quare et latus C F lateri F D est æquale[l]. Similiter demonstrabitur et unaquæque ipsarum F B, F A, F E æqualis unicuique F C, F D. Quinque igitur rectæ lineæ F A, F B, F C, F D, F E inter se æquales sunt. Ergo centro F, et intervallo unius ipsarum F A, F B, F C, F D, F E, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum A B C D E, quod æquilaterum est et æquiangulum. Describatur, et sit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et æquiangulum circulus descriptus est. *Q. E. F.*



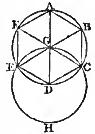

[k] Cor. 1.* 13. hujus.
[l] 6. primi.

*Cor.* * (Clavii) Eodem prorsus modo circa quamlibet figuram æquilateram et æquiangulam circulus describendus est.

## PROP. XV. PROBL. [XV.]

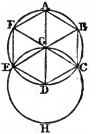
*In dato circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere.*

Sit datus circulus A B C D E F. Oportet in circuli A B C D E F hexagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Ducatur circuli A B C D E F diameter A D, sumaturque centrum circuli G; et centro quidem D, intervallo autem D G, circulus describatur E G C H. Junctæ E G, C G ad puncta B, F producantur, et jungantur A B, B C, C D, D E, E F, E A. Dico hexagonum A B C D E F æquilaterum et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est A B C D E F circuli, erit G E ipsi G D æqualis. Rursus quoniam D centrum est circuli E G C H, erit D E æqualis eidem D G. Æquilaterum igitur est E G D triangulum; ideoque tres ipsius anguli E G D, G D E, D E G inter se æquales[m] sunt; et sunt trianguli tres anguli æquales[n] duobus rectis. Angulus igitur E G D duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur et D G C duorum rectorum




[m] Cor. 5. primi.
[n] 32. primi.

rectorum tertia pars. Et quoniam recta linea C G super rectam E B insistens, angulos, qui deinceps sunt, E G C, C G B, duobus re-



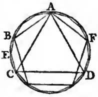

o 13. primi. ctis æquales o efficit; erit et reliquus C G B tertia pars duorum rectorum. Anguli igitur E G D, D G C, C G B inter se sunt æquales. Et qui ipsis ad verticem sunt anguli B G A, A G F,
p 18. primi. F G E, æquales p sunt angulis E G D, D G C, C G B. Quare sex anguli E G D, D G C, C G B, B G A, A G F, F G E inter se æquales sunt. Sed æquales
q 26. tertii. anguli æqualibus circumferentiis insistunt q. Sex igitur circumferentiæ A B, B C, C D, D E, E F, F A inter se
r 29. tertii. sunt æquales. Æquales autem circumferentias æquales r rectæ lineæ subtendunt. Ergo et sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est A B C D E F hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia A F circumferentiæ E D est æqualis, communis apponatur circumferentia A B C D: tota igitur F A B C D circumferentia æqualis est toti circumferentiæ E D C B A. Et circumferentiæ quidem F A B C D angulus F E D insistit, circumferentiæ vero E D C B A in-
s 27. tertii. sistit angulus A F E; angulus igitur A F E angulo D E F est s æqualis. Similiter ostendentur et reliqui anguli hexagoni A B C D E F sigillatim æquales utrique ipsorum A F E, F E D. Ergo æquiangulum est A B C D E F hexagonum. Ostensum autem est et æquilaterum esse; et descriptum est circulo A B C D E F. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum est. *Q. E. F.*

Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quæ est ex centro circuli, æquale esse; et si per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum, consequenter iis, quæ in pentagono dicta sunt: et præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, et circumscribemus. *Q. E. F.*

PROP.

## PROP. XVI. PROBL. [XVI.]

*In dato circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere.*




Sit datus circulus A B C D. Oportet in A B C D circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Sit A C latus trianguli[t] quidem æquilateri, in ipso circulo A B C D descripti; pentagoni [u] vero æquilateri latus A B. Quarum igitur partium est A B C D F circulus quindecim, earum circumferentia quidem A B C, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero A B, quæ quinta est circuli, erit trium. Ergo reliqua B C est duarum. Secetur B C bifariam in puncto E[x]. Quare utraque ipsarum B E, E C circumferentiarum quintadecima pars est A B C D circuli. Si igitur jungentes B E, E C, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo [y]A B C D aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum et æquiangulum descriptum erit. *Q. E. F.*

[t] 2. hujus.
[u] 11. hujus.
[x] 30. tertii.
[y] 1. hujus.

Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum et æquiangulum; et insuper dato quindecagono æquilatero et æquiangulo circulum inscribemus, et circumscribemus.

# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

## LIBER QUINTUS.

### DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [I.]

PARS est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II. [II.]

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III. [III.]

Proportio seu ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem mutua quædam habitudo.

IV. [IV.]

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V. [VIII.]

Analogia est proportionum similitudo.

VI. [IX.]

Analogia vero in tribus ad minimum terminis consistit.

VII. [V.]

In eâdem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æquimultiplices, secundæ et quartæ æquimultiplices,

multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatæ.

[VI.] VIII.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

*Cor.* * Manifeſtum eſt ex definitione ſeptimâ, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, et inverſe proportionales eſſe.

[VII.] IX.

Prima ad ſecundam major eſſe dicitur quam in proportione tertiæ ad quartam (vel ad ſecundam majorem proportionem habere quam tertia ad quartam) quando minor aliqua quam prima ad ſecundam proportionem habet eandem, quam tertia ad quartam.

[X.] X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam proportionem habere dicetur ejus, quam habet ad ſecundam.

[XI.] XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicetur ejus, quam habet ad ſecundam; et deinceps, uno ſemper amplius quoadusque analogia proceſſerit.

[XII.] XII.

Homologæ magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

[XIII.] XIII.

Alterna ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.

[XIV.] XIV.

Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem ceu conſequentem.

[XV.] XV.

Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis unà cum conſequente, tanquam unius, ad ipſam conſequentem.

[XVI.] XVI.

Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſûs, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

XVII.

XVII. [XVII.]

Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

XVIII. [XVIII.]

Ex æquo, ſive ex æqualitate, ratio eſt, cum plures magnitudines extiterint, et aliæ, ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur et in eâdem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum, omiſſis mediis.

XIX. [XIX.]

Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

XX. [XX.]

Perturbata vero proportio eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, et aliis, ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

## AXIOMATA.

I. [I.]

Ejuſdem ſive æqualium æquimultiplices inter ſe æquales ſunt.

II. [II.]

Quarum eadem æquimultiplex eſt, vel quarum æquales ſunt æquimultiplices, et ipſæ inter ſe ſunt æquales.

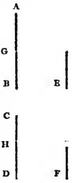
III. *

Inæqualium æquimultiplices ſunt inæquales, et major eſt majoris multiplex.

## [I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

*Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquimultiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium.*

Sint quotcunque magnitudines A B, C D quotcunque magnitudinum E, F, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquimultiplices. Dico quotuplex eſt A B ipſius E, totuplices eſſe et A B, C D ſimul ipſarum E, F ſimul. Quoniam enim A B æquimultiplex eſt ipſius E, ac C D ipſius F; quot magnitudines ſunt in A B æquales ipſi E, tot erunt et in C D æquales ipſi F. Dividatur A B quidem in partes ipſi E æquales, quæ ſint A G, G B; et C D dividatur in partes æquales ipſi F, videlicet C H, H D. Erit igitur multitudo partium C H, H D æqualis multitudini ipſarum A G, G B. Et quoniam A G eſt æqualis E, et C H æqualis F; erunt et A G, C H æquales ipſis E, F. Eâdem ratione, quoniam G B eſt æqualis E, et H D ipſi F; erunt G B, H D æquales ipſis E, F. Quot igitur ſunt in A B æquales ipſi E, tot ſunt et in A B, C D æquales ipſis E, F. Ergo quotuplex eſt A B ipſius E, totuplices erunt et A B, C D ſimul ipſarum E, F ſimul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquimultiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt et omnes omnium. *Q. E. D.*

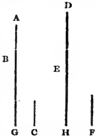



## [II.] PROP. II. THEOR.

*Si prima ſecundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta ſecundæ æquimultiplex, ac ſexta quartæ; erit etiam compoſita prima cum quintâ ſecundæ æquimultiplex, ac tertia cum ſextâ quartæ.*

Sit prima A B ſecundæ C æquimultiplex, ac tertia D E quartæ F. Sit autem et quinta B G ſecundæ C æquimultiplex, ac ſexta E H quartæ F. Dico et compoſitam primam cum quintâ, ſcil. A G, ſecundæ C æquimultiplicem

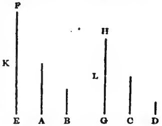
multiplicem esse, ac tertiam cum sextâ, sc. D H, quartæ F. Quoniam enim A B æquimultiplex est C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales C, tot erunt et in D E æquales F. Eâdem ratione et quot sunt in B G æquales C, tot et in E H erunt æquales F. Quot igitur sunt in totâ A G æquales C, tot erunt et in totâ D H æquales F. Ergo quotuplex est A G ipsius C, totuplex est et D H ipsius F. Et composita igitur prima cum quintâ A G secundæ C æquimultiplex erit, ac tertia cum sextâ D H quartæ F. Quare si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem et quinta secundæ æquimultiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima cum quintâ æquimultiplex secundæ, ac tertia cum sextâ quartæ. Q. E. D.




## PROP. III. THEOR. [III.]

*Si prima secundæ æquimultiplex fuerit, ac tertia quartæ; sumantur autem æquimultiplices primæ et tertiæ; erit et, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æquimultiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.*

Sit prima A secundæ B æquimultiplex, ac tertia C quartæ D; et sumantur ipsarum A, C æquimultiplices E F, G H. Dico E F æquimultiplicem esse ipsius B, ac G H ipsius D. Quoniam enim E F æquimultiplex est ipsius A, ac G H ipsius C; quot magnitudines sunt in E F æquales A, tot erunt et in G H æquales C. Dividatur E F quidem in magnitudines ipsi A æquales E K, K F; G H vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet G L, L H. Erit igitur ipsarum E K, K F multitudo æqualis multitudini ipsarum G L, L H. Et quoniam æquimultiplex est A ipsius B, ac C ipsius D: æqualis autem E K ipsi A, et G L ipsi C; erit E K æquimultiplex ipsius B, ac G L ipsius D. Eâdem ratione æquimultiplex erit K F ipsius B, ac L H ipsius D.




 Quoniam

Quoniam igitur prima E K ſecundæ B æquimultiplex eſt, ac tertia G L quartæ D; eſt autem et quinta K F ſecundæ B æquimultiplex, ac ſexta L H quartæ D: erit et compoſita prima cum quintâ E F ſecundæ B æquimulti-
[a] 2. hujus. plex [a], ac tertia cum ſextâ G H quartæ D. Si igitur prima ſecundæ fuerit æquimultiplex, ac tertia quartæ, ſumantur autem primæ et tertiæ æquimultiplices; erit et, ex æquali, ſumptarum utraque utriuſque æquimultiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. *Q. E. D.*

[IV.]

## PROP. IV. THEOR.

*Si prima ad ſecundam eandem habet proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ et tertiæ ad æquimultiplices ſecundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter ſe comparatæ.*

Prima A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D. Et ſumantur ipſarum quidem A, C utcunque æquimultiplices E, F; ipſarum vero B, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Dico E ad G ita eſſe ut F ad H. Sumantur rurſus ipſarum E, F utcunque æquimultiplices K, L, et ipſarum G, H utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur E æquimultiplex eſt ipſius A, atque F ipſius C; ſumuntur autem ipſarum E, F æquimultiplices K, L:
[b] 3. hujus. erit K æquimultiplex [b] ipſius A, atque L ipſius C. Eâdem ratione M æquimultiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. Et quoniam eſt ut A ad B ita C ad D; ſumptæ autem ſunt ipſarum A, C æquimultiplices K, L; et ipſarum B, D
[c] Def. 5. hujus. aliæ æquimultiplices M, N: ſi [c] K ſuperat M, ſuperabit et L ipſam N; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Suntque K, L quidem ipſarum E, F utcunque æquimultiplices; M, N vero ipſarum G, H aliæ utcunque æquimultiplices.




Ut

Ut igitur E ad G ita [d] erit F ad H. Quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; et æquimultiplices primæ ac tertiæ ad æquimultiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. *Q. E. D.* [d] Def. 5.

## PROP. V. THEOR. [V.]

*Si magnitudo magnitudinis æquimultiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ æquimultiplex erit, ac tota totius.*

Magnitudo A B magnitudinis C D æquimultiplex sit, atque ablata A E ablatæ C F. Dico et reliquam E B reliquæ F D æquimultiplicem esse, atque totam A B totius C D. Quotuplex enim est A E ipsius C F, totuplex fiat et E B ipsius C G. Et quoniam A E æquimultiplex est C F, atque E B ipsius C G; erit [e] A E æquimultiplex C F, ac A B ipsius G F; ponitur autem æquimultiplex A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. Æquimultiplex igitur est A B utriusque G F, C D; ac propterea G F ipsi C D est [f] æqualis. Communis auferatur C F. Reliqua igitur G C æqualis est reliquæ D F. Itaque quoniam A E æquimultiplex est C F, ac E B ipsius C G, estque C G æqualis D F; erit A E æquimultiplex C F, ac E B ipsius F D. Æquimultiplex autem ponitur A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. Ergo E B est æquimultiplex F D, ac A B ipsius C D. Et reliqua igitur E B reliquæ F D æquimultiplex est, atque tota A B totius C D. Quare si magnitudo magnitudinis æquimultiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ erit æquimultiplex, ac tota totius. *Q. E. D.*




[e] 1. hujus.

[f] Ax. 2. hujus.

## PROP. VI. THEOR. [VI.]

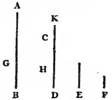
*Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatæ quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices.*

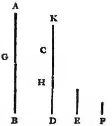
Duæ magnitudines A B, C D duarum magnitudinum E, F æquimultiplices sint; et ablatæ A G, C H earundem sint æquimultiplices. Dico et reliquas G B, H D vel ipsis

ipsis E, F æquales esse, vel ipsarum æquimultiplices. Sit enim primo G B æqualis E. Dico et H D ipsi F esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis C K. Et quoniam A G æquimultiplex est E, ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æquimultiplex [g] E, ac K H ipsius F. Æquimultiplex autem ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. Ergo K H æquimultiplex est F, ac C D ipsius F. Quoniam igitur utraque ipsarum K H, C D est æquimultiplex F, erit K H æqualis [h] C D. Communis auferatur C H. Ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. Sed K C est æqualis F. Et H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, et H D ipsi F æqualis erit. Similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, et H D ipsius F æquimultiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æquimultiplices sint, et ablatæ quædam sint earundem æquimultiplices; erunt et reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æquimultiplices. *Q. E. D.*

[g] 1. hujus.

[h] Ax. 1. hujus.




[VII. IX.] PROP. VII. THEOR.

× *Æqualium ad eandem eadem est proportio. Et æquales sunt, quarum ad eandem proportio eadem.*

Sint æquales A, B, et ejusdem generis tertia quædam C. Dico A ad C eandem proportionem habere, quam B ad C.

Duarum A, B capiantur utcunque æquimultiplices D, E; et tertiæ C multiplex quælibet F. Æqualium A, B æquimultiplices D, E inter se sunt æquales [1]. Quare si D major sit quam F, et E eâdem F major erit. Si D, F inter se æquales sint, erunt E, F inter se æquales. Si D minor sit quam F, et E eâdem F minor erit. Æquales igitur

[1] Ax. 1. hujus.



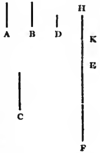

A, B

× Equal Magnitudes have the same ratio to the same magnitude; and the same has the same ratio to Equal magnitudes. Simson.

Equal magnitudes have the same proportion to the same magnitude and the same magnitude hath to Equal Magnitudes the same proportion

A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem habent [l]. [l] Def. 5. hujus.

Habeant jam A, B ad tertiam C eandem utraque proportionem. Dico A, B esse inter se æquales. Non enim. Altera igitur major. Major sit A: excessui* autem ponatur D æqualis. Multiplicari potest magnitudo D, eo usque ut magnitudine C major evadat. Factam puta multiplicationem, et sit H E multiplex magnitudinis D, magnitudine C major. Capiatur E F toties multiplex magnitudinis B, quoties H E magnitudinis D. Quoniam magnitudo A magnitudinibus B, D simul æqualis est; erunt H F, F E magnitudinum A, B æquimultiplices [k]. Capiatur F K magnitudinis C multiplex, magnitudine F E proxime major. E K igitur non major est quam C. At E H major quam C [l]. Quare E H major quam E K. Additoque communi F E, H F major quam K F. F E autem minor est quam F K [l]. Sed cum A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad C; magnitudines autem F E, F H magnitudinum A, B sint æquimultiplices, et F K multiplex sit ipsius C, et F H major sit quam F K; erit F E major quam F K [l]. Sed ostensa est minor. Simul igitur major et minor. Quod est absurdum. Non sunt igitur A et B inæquales. Æquales igitur. Æqualium igitur ad eandem &c. *Q. E. D.*




[k] 1. hujus.

[l] Per constru&.

*Cor.* * Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus A et B, et ejusdem generis tertiâ aliquâ C; inveniri possunt magnitudinum A, B æquimultiplices tales, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C superet, cum minoris multiplex eâdem magnitudinis C multiplici minor sit.

PROP. VIII. THEOR. [VII. IX.]

*Ejusdem ad æquales eadem est proportio. Et æquales sunt, ad quas ejusdem proportio est eadem.*

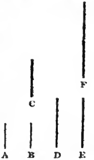
Æquales sint A, B, et generis ejusdem sit tertia quævis C. Dico magnitudinem C ad utramque A, B eandem proportionem habere. Capiantur enim A et B æquimultiplices D, E; et magnitudinis C multiplex quælibet

* By that Magnitude A is greater, to that Magnitude C & D be equal.

quælibet F. Æquales erunt D, E, æqualium æquimultiplices [m]. Quare si F major sit quam D, eadem F major erit quam E. Si F, D æquales sint, æquales erunt F, E. Si F minor quam D, eadem F minor quam E. Magnitudo igitur C ad utramque æqualium A, B eandem proportionem habet [n]. Quod primum erat demonstrandum.

[m] Ax. 1. hujus.

[n] Def. 5. hujus.




Habeat jam C ad utramque A, B proportionem eandem. Dico A, B æquales. Non enim. Inæquales igitur. Inveniri igitur possunt magnitudinum A, B istiusmodi æquimultiplices, ut majoris multiplex multiplicem quandam magnitudinis C superet, cum minoris multiplex eadem magnitudinis C multiplici minor sit [o]. Non eadem igitur erit magnitudinis C ad A, quæ ipsius ad B proportio. Quod hypothesi contrarium est. Non sunt igitur A, B inæquales. Æquales igitur. Quare ejusdem ad æquales &c. *Q. E. D.*

[o] Cor. * 7. hujus.

[VIII. X.]

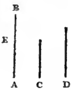
## PROP. IX. THEOR.

*Inæqualium major ad eandem majorem proportionem habet. Et major est, cujus proportio ad eandem major.*

Inæqualium A B, C major sit A B. Dico A B ad tertiam quamlibet D, ejusdem generis, proportionem habere majorem, quam C ad eandem D habet. Capiatur A E illi C æqualis. Æquales igitur A E et C ad eandem D eandem proportionem habent [p]. Sed propter æquales A E, C, et C minorem quam A B, erit A E minor quam A B. Minor igitur quam A B habet ad D proportionem eandem, quam C ad D. Ergo A B ad D majorem habet proportionem quam C ad D [q].

[p] 7. hujus.

[q] Def. 7. hujus.




Inæqualium autem A B, C, habeat A B ad tertiam aliquam homogeneam D majorem proportionem quam C ad D. Dico A B majorem quam C. Habet enim minor quædam quam A B ad D proportionem eam, quam C ad D [q]. Minor illa sit A E. Æquales igitur sunt

A E,

A E, C [r]. Quare A B, quæ major eſt quam A E, ejus [r] 9. hujus.
æquali C major erit. Quare inæqualium major &c.
*Q. E. D.*

PROP. X. THEOR. [VIII. X.]

* *Eadem ad inæqualium minorem majorem proportionem habet. Et minor eſt, ad quam ejuſdem proportio major.*

Inæqualium A, B ſit B minor. Et ejuſdem generis ſit alia quævis C D. Dico C D ad B majorem proportionem habere quam ad A. Magnitudinum A, B capiantur æquimultiplices F E, F H; magnitudinis etiam C D multiplex F K, quæ minor ſit quam F E, major autem quam F H. Namque eo modo multiplices capi poſſunt [s]. Habeat C L ad B proportionem eam, quam C D ad A. Quoties autem F K multiplex eſt magnitudinis C D, toties ſit M illius C L. Jam cum C D ad A proportionem habeat, quam C L ad B; magnitudines autem F K, M primæ et tertiæ, C D et C L, ſint æquimultiplices, et F E, F H ſecundæ et quartæ A et B; F K autem minor ſit quam F E, idcirco M minor erit quam F H [t]. Multo igitur minor quam F K. Sunt autem M, F K magnitudinum C L, C D æquimultiplices: C L igitur minor erit quam C D [u]. Minor igitur quam C D habet ad B eandem, quam C D ad A proportionem: C D igitur majorem habet ad B quam ad A proportionem [x]. Quod primum erat demonſtrandum.




[s] Cor. 7. hujus.
[t] Def. 5. hujus.
[u] Ax. 3. hujus.
[x] Def. 7. hujus.

Habeat jam C D ad B proportionem majorem quam ad A. Dico B minorem quam A. Nam cum C D majorem habeat ad B quam ad A proportionem; minor aliqua quam C D habet ad B proportionem, quam C D ad A [x]. Sit minor illa C L. Inæqualium C D, C L capiantur F K, M æquimultiplices; et magnitudinis B multiplex quædam F H, quæ major ſit quam M, minor autem quam F K. Trium enim C D, C L, B eo modo capi poſſunt multiplices [s]. Quoties autem eſt F H multiplex ipſius B, toties ſit F E ipſius A. Jam cum C L ad B proportionem habeat eandem, quam C D ad A, et magnitudines M, F K primæ et tertiæ, C L et C D, ſint æqui-

* Of Magnitudes having a proportion to the same magnitude, that which hath the Greater proportion is the Greater, and to what Magnitude the same magnitude hath a greater proportion, that is the less Magnitude
Scarburgh

æquimultiplices, necnon F H et F E secundæ et quartæ B et A, harum autem M minor ſit quam F H; erit F K minor quam F E. Quare F H multo minor quam F E. Sunt autem F H, F E magnitudinum B, A æquimultiplices. Quare B minor eſt quam A [y]. Quare eadem ad inæqualium &c. *Q. E. D.*

[y] Ax. 3. hujus.

[XI.] PROP. XI. THEOR.

* *Quæ eidem eædem ſunt proportiones, et inter ſe eædem ſunt.*

Sint enim ut A ad B ita C ad D; ut autem C ad D ita E ad F. Dico ut A ad B ita eſſe E ad F. Sumantur enim




ipſarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K; ipſarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B ita C ad D; et ſumptæ ſunt ipſarum A, C æquimultiplices G, H, et ipſarum B, D aliæ utcunque æquimultiplices L, M; ſi [z] G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Rurſus quoniam eſt ut C ad D ita E ad F; et ſumptæ ſunt ipſarum C, E utcunque æquimultiplices H, K, ipſarum vero D, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N; ſi [z] H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Sed ſi H ſuperat M, et G ſuperabit L; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Quare ſi G ſuperat L, et K ipſam N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Et ſunt G, K quidem ipſarum A, E æquimultiplices; L, N vero ipſarum B, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ergo [z] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, et inter ſe eædem ſunt. *Q. E. D.*

[z] Def. 5. hujus.

depends on having G-M-N to have the same ratio to L-M-N.

*Proportions which are the same to the same proportion are the same to one another. Scarburgh.

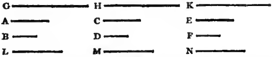
Ratios that are the same to the same ratio are the same to one another. Simson

PROP.

## PROP. XII. THEOR. [XII.]

* *Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.*

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F, et ut A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A, C, E, ad B, D, F. Sumantur enim




ipsarum A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, et ipsarum B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, et E ad F; et sumptæ sunt ipsarum quidem A, C, E utcunque æquimultiplices G, H, K, ipsarum vero B, D, F aliæ utcunque æquimultiplices L, M, N; si [a] G superat L, et H ipsam M superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si G superat L, superabunt et G, H, K ipsas L, M, N; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Suntque G, et G, H, K ipsarum A, et A, C, E æquimultiplices; quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquimultiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt et omnes omnium. Et eâdem ratione L, et L, M, N ipsarum B, et B, D, F sunt æquimultiplices. Est igitur [a] ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. *Q. E. D.*

[a] Def. 5. hujus.

[b] 1. hujus.

*If Magnitudes how many soever be Proportionals, it shall be, as one of the Antecedents to one of the Consequents so shall all the antecedents to all the consequents.* [illegible]

*If any number of magnitudes be proportionals, as one of the Antecedents is to its Consequent, so shall all the Antecedents taken together be to all the Consequents. Simson.*

PROP.

## [XIII.] PROP. XIII. THEOR.

*Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: et prima ad secundam majorem habebit proportionem, quam quinta ad sextam.*

Sit prima A ad secundam B ut tertia C ad quartam D. Tertia autem C major sit quam ut habeat ad quartam D proportionem eam, quam quinta E ad sextam F. Dico




primam A majorem esse quam ut habeat ad secundam B proportionem, quam quinta E ad sextam F. Habeat enim G ad B proportionem eam, quam E ad F. Propter C majorem quam ad D in ratione E ad F, minor aliqua quam C habet ad D proportionem eam, quam E ad F. Sit H minor illa. Inæqualium C, H capiantur L, M æquimultiplices; capiatur etiam N multiplex ipsius D, quæ major sit quam M, minor autem quam L. Trium enim C, H, D ita capi possunt multiplices [c]. Capiantur etiam Q, R, S magnitudinum A, G, E toties multiplices, quoties L, M magnitudinum sunt C, H. Capiantur denique O, P magnitudinum B, F toties multiplices, quoties N multiplex est ipsius D. Jam cum H sit ad D ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, H et E, sint M et S æquimultiplices; secundæ autem et quartæ, D et F, sint N, P æquimultiplices; cum præterea harum multiplicium M minor sit quam N, erit S minor quam P [d]. Rursum cum G sit ad B ut E ad F, harum autem primæ et tertiæ, G et E, sint R, S æquimultiplices, secundæ autem et quartæ, B et F, æquimultiplices sint O et P; cum præterea harum multiplicium S minor sit quam P (id enim modo ostensum) erit R minor quam O [d]. Rursum cum A sit ad B ut C ad D, harum autem primæ et tertiæ, A et

[c] Cor. [a] 7. hujus.

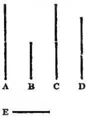
[d] Def. 5. hujus.

"If the first hath to the second the same proportion that the third hath to the fourth, and the third to the fourth, hath a greater proportion than the fifth to the sixth, also the first hath a greater proportion to the second than the fifth to the sixth. Scarburgh

[...]son's enunciation is the same as Keeley's.

et C, sint Q, L æquimultiplices; secundæ autem et quartæ, B et D, æquimultiplices O et N; præterea cum harum multiplicium L major sit quam N, erit etiam Q major quam O [e]. Multo major igitur quam R, quæ [e] Def. 5. hujus. ostensa est minor quam O. Magnitudinum autem A, G sunt illæ Q, R æquimultiplices. Quare A major est quam G [f]. Sed G habet ad B proportionem eam, quam [f] Ax. 3.* hujus. E ad F. Major igitur A ad B quam in ratione E ad F. Quare si prima &c. *Q. E. D.*

*Cor.** Si prima ad secundam major sit quam in ratione tertiæ ad quartam, invertendo erit quarta ad tertiam major quam in proportione secundæ ad primam. Sit A ad B major quam in ratione C ad D. Dico D ad C majorem quam in ratione B ad A. Sit enim C ad E ut A ad B. Cum igitur C sit ad E ut A ad B, et A ad B major quam in ratione C ad D; erit C ad E major quam in proportione C ad D [g]. Quare E minor erit quam D [h]. Sed cum C ad E ut A ad B, invertendo erit E ad C ut B ad A [i]. Minor igitur quam D habet ad C proportionem eam, quam B ad A. *Q. E. D.*




[g] Per hanc Prop.
[h] 10. hujus.
[i] Cor.* Def. 8. hujus.

PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.*

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quam C. Dico et B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, et alia est utcunque magnitudo B, habebit [k] A ad B majorem proportionem quam C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. Ergo et C ad D majorem habebit [l] proportionem quam C ad B. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [m] est. Quare D est minor




[k] 8. hujus.
[l] 13. hujus.
[m] 10. hujus.

K quam

In the second case, A being equal to C. B is proved equal to D, by shewing that A is to B, as C that is A is to D, it has the same ratio to both. In the third case, because C is greater than A & because C is to D A is to B, D is greater than B by the first case

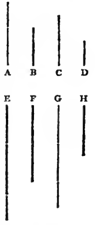
quam B; ac propterea B quam D major erit. Similiter demonſtrabimus et ſi A æqualis ſit ipſi C, et B ipſi D eſſe æqualem; et ſi A ſit minor quam C, et B quam D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia, et ſecunda quam quarta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. *Q. E. D.*

SCHOLION.*

Subjungere viſum eſt demonſtrationem cognati Theorematis, quod mirum eſt Euclidem ſilentio præteriiſſe.

Si prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, prima autem ſecundæ æqualis ſit, erit et tertia æqualis quartæ. Quod ſi prima major ſit quam ſecunda, erit et tertia major quam quarta; ſi minor, minor.

(Demonſtratio Simſoni) Sit prima A ad ſecundam B, ut tertia C ad quartam D. Quatuor A, B, C, D capiantur E, F, G, H æquimultiplices.




Jam ſi æquales ſint A et B, æquales erunt E et F, æqualium utique æquimultiplices [n]. Sed cum A ſit ad B ut C ad D, primæ autem et tertiæ æquimultiplices ſint, E, G, ſecundæ item et quartæ, F, G; cum præterea E oſtenſa ſit æqualis ipſi F, erit G æqualis ipſi H [o]. Illæ autem G, H tertiæ et quartæ C, D ſunt æquimultiplices. Æquales igitur ſunt C et D [p].

Quod ſi A major ſit quam B, erit E major quam F [q]. Quare [o] G major quam H. Sed G, H duarum C, D ſunt æquimultiplices. Quare duarum major eſt C, cujus multiplex major [q].

[n] Ax. 1. hujus.
[o] Def. 5. hujus.
[p] Ax. 2. hujus.
[q] Ax. 3.* hujus.

Simili modo oſtendetur, ſi A minor ſit quam B, minorem eſſe C quam D. Quare ſi prima &c. *Q. E. D.*

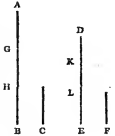
Scarburgh Page 215 proves this to be implied in the notion of Proportionals.

PROP.

## PROP. XV. THEOR. [XV.]

*Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices.*

Sit enim A B æquimultiplex c, ac D E ipsius F. Dico ut C ad F, ita esse A B ad D E. Quoniam enim æquimultiplex est A B ipsius C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi C, totidem erunt et in D E æquales F. Dividatur A B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint A G, G H, H B; et D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K, K L, L E. Erit igitur ipsarum A G, G H, H B multitudo æqualis multitudini D K, K L, L E. Et quoniam æquales sunt A G, G H, H B, suntque D K, K L, L E inter se æquales; ut A G ad D K, ita [r] erit G H ad K L, et H B ad L F. Atque erit [s] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut A G ad D K, ita A B ad D E. Sed A G ipsi C est æqualis, et D K ipsi F. Ergo ut C ad F, ita erit A B ad D E. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem, quam habent earum æquimultiplices. *Q. E. D.*

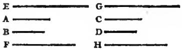


[r] 7. hujus.
[s] 11. hujus.

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.*

Sint quatuor magnitudines A, B, C, D; sitque ut A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A, B utcunque æquimultiplices E, F; ipsarum vero C, D aliæ utcunque æquimultiplices G, H. Et quoniam æquimultiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem inter se comparatæ eandem habent [t] proportionem



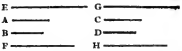
[t] 15. hujus.



If four magnitudes of the same kind be proportionals, they also be proportion when taken alternately. Simson

Magnitudes have the same ratio to one another which their Equimultiples have. Simson.
Parts compared with one another have the same proportion with their equimultiples. Peacock.

portionem, quam habent earum æquimultiplices; erit ut A ad B ita E ad F. Ut autem A ad B ita C ad D. Ergo




u 11. hujus. et ut C ad D ita[u] E ad F. Rurſus quoniam G, H ſunt ipſarum C, D æquimultiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter ſe comparatæ,
x 15. hujus. quam habent earum æquimultiplices; erit [x] ut C ad D ita G ad H. Sed ut C ad D ita E ad F. Ergo et ut E ad F ita G ad H. Quod ſi quatuor magnitudines pro-
y 14. hujus. portionales ſint, prima autem major [y] ſit quam tertia, et ſecunda quam quarta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Si igitur E ſuperat G, et F ipſam H ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntque E, F ipſarum A, B utcunque æquimultiplices, et G, H ipſarum C, D aliæ utcunque æquimultiplices;
z Def. 5. ergo [z] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

*Cor.* * Si prima ad ſecundam major ſit quam in proportione tertiæ ad quartam; permutando prima ad tertiam major erit quam in ratione ſecundæ ad quartam.

Sit A major quam ad B in ratione C ad D. Dico permutando A majorem eſſe quam ad C in ratione B ad D. Quoniam enim A major eſt quam ad B in ratione C ad D; erit minor aliqua quam A ad B ut C ad D: ſit E minor illa. Cum igitur ſit E ad B ut C ad D; permutando erit
a Per hanc Prop. E ad C, ut B ad D [a]. Minor igitur quam A habet ad C proportionem eam, quam B ad D. Quare major A quam ad
b Def. 7. hujus. C in proportione B ad D [b]. *Q. E. D.*

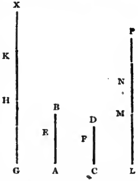



PROP.

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si compositæ magnitudines sint proportionales, et divisæ proportionales erunt.*

Sint compositæ magnitudines proportionales A B, B E, C D, D F; hoc est, ut A B ad B E, ita sit C D ad D F. Dico etiam divisas proportionales esse; videlicet ut A E ad E B ita esse C F ad F D. Sumantur enim ipsarum quidem A E, E B, C F, F D utcunque æquimultiplices G H, H K, L M, M N; ipsarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices K X, N P. Quoniam æquimultiplex est G H ipsius A E, ac H K ipsius E B; erit [c] G H ipsius A E æquimultiplex, ac G K ipsius A B. [c 1. hujus.]




Æquimultiplex autem est G H ipsius A E, ac L M ipsius C F. Ergo G K æquimultiplex est A B, ac L M ipsius C F. Rursus quoniam æquimultiplex est L M ipsius C F, ac M N ipsius F D; erit [c] L M æquimultiplex C F, ac L N ipsius C D. Sed æquimultiplex erat L M ipsius C F, ac G K ipsius A B. Æquimultiplex igitur est G K ipsius A B, ac L N ipsius C D. Quare G K, L N ipsarum A B, C D æquimultiplices erunt. Rursus quoniam æquimultiplex est H K ipsius E B, ac M N ipsius F D: est autem et K X ipsius E B æquimultiplex, ac N P ipsius F D; et composita H X ipsius E B æquimultiplex est[d], ac M P ipsius F D. [d 2. hujus.] Quare cum sit ut A B ad B E, ita C D ad D F; et sumptæ sint ipsarum quidem A B, C D æquimultiplices G K, L N, ipsarum vero E B, F D aliæ utcunque æquimultiplices H X, M P: si [e] G K superat H X, et L N superabit M F; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. [e Def. 5. hujus.] Superet igitur G K ipsam H X; communique ablatâ H K, et G H ipsam K X superabit. Sed si G K superat H X, et L N superat M F; itaque superat L N ipsam M P: communique M N ablatâ, et L M superabit N F. Quare si G H superat K X, et L M ipsam N P superabit. Similiter demonstrabimus et si G H sit æqualis

K 3 K X,

If Magnitudes taken jointly be proportional's, they shall also be proportionals when taken separately, & (which Simson confuses in explaining)

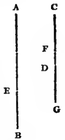
K X, et L M ipsi N P esse æqualem; et si minor, minorem. Sunt autem G H, L M ipsarum A E, C F utcunque æquimultiplices, et ipsarum E B, F D aliæ utcunque æqui-
f Def. 5. hujus. multiplices K X, N P. Ergo[f] ut A E ad E B ita erit C F ad F D. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, et divisæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

*Cor.* * Si prima et secunda simul ad secundam major sit quam in proportione tertiæ et quartæ simul ad quartam; dividendo prima ad secundam major est quam in proportione tertiæ ad quartam.

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

*Si divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales erunt.*

Sint divisæ magnitudines proportionales A E, E B, C F, F D; hoc est ut A E ad E B, ita C F ad F D. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut A B ad B E, ita esse C D ad D F. Nam ut A B ad B E, ita sit G F ad F D. Et quoniam est ut A B ad B E, ita G F ad F D, compositæ magnitudines sunt proportion-
g 17. hujus. ales; ergo et divisæ proportionales erunt[g]. Est igitur ut A E ad E B, ita G D ad D F. Ponitur autem ut A E ad E B, ita C F ad
h 11. hujus. F D. Quare et[h] ut G D ad D F, ita C F ad F D. Duarum igitur G D, C F ad eandem F D eadem est proportio. Æquales igitur
i 9. hujus. inter se sunt G D, C F[i]. Additâque communi D F erunt G F, C D inter se æquales. Æqualium
k 7. hujus. autem G F, C D ad eandem F D proportio eadem[k]. Erit igitur C D ad D F ut G F ad F D. Sed G F est ad F D ut A B ad B E. Quare A B ad B E ut C D ad D F. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, et compositæ proportionales erunt. *Q. E. D.*




*Cor.* * Si prima ad secundam major sit quam in proportione tertiæ ad quartam; componendo, prima et secunda simul ad secundam major est quam in ratione tertiæ et quartæ simul ad quartam.

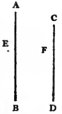
If Magnitudes taken separately be proportionals, they shall also be proportionals when taken jointly, that is if the first be to the second as the third to the fourth, the first and second together shall be to the second as the third and fourth together to the fourth.
Simson.

PROP.

## PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

*Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.*

Sit enim ut tota A B ad totam C D, ita ablata A E ad ablatam C F. Dico et reliquam E B ad reliquam F D ita eſſe ut tota A B ad totam C D. Quoniam enim eſt ut tota A B ad totam C D, ita A E ad C F; et permutando erit[k] ut A B ad A E, ita C D ad C F. Quoniam compoſitæ magnitudines ſunt proportionales, et diviſæ proportionales erunt[l]; ut igitur B E ad E A, ita D F ad F C: rurſuſque permutando ut[k] B E ad D F, ita E A ad F C. Sed ut E A ad C F, ita poſita eſt A B ad C D. Et reliqua [m] igitur E B erit ad reliquam F D, ut tota A B ad totam C D. Quare ſi fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. *Q. E. D.*




k 16. hujus.
l 17. hujus.
m 11. hujus.

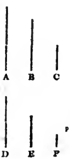
*Cor.* Si quatuor magnitudines proportionales ſint, per converſionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut A B ad B E ita C D ad D F. Dividendo erit A E ad E B ut C F ad F D[l]. Et invertendo B E ad E A ut D F ad F C[n]. Quare componendo B A ad A E ut D C ad C F[o].

n Cor. * Def. 8. hujus.
o 18. hujus.

## PROP. XX. THEOR. [XX.]

*Si ſint tres magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eâdem proportione; ex æquali autem prima major ſit, quam tertia: et quarta quam ſexta major erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor.*

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipſis numero æquales D, E, F, binæ ſumptæ, ſint in eâdem proportione: id eſt, ſit ut A ad B, ita D ad E, et ut B ad C, ita E ad F: ex æquali autem major ſit A quam C. Dico et D quam F majorem eſſe; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem. Quoniam enim A major eſt quam C, alia vero eſt utcunque B, et major ad eandem majorem habet[p] proportionem quam minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita D ad




p 8. hujus.

D ad E; et invertendo ut C ad B, ita F ad E. Ergo
[p] 13. hujus. et D ad E majorem habet proportionem quam F ad E[p].
Proportionem vero ad eandem habentium, quæ majorem
[q] 10. hujus. habet, illa major[q] est. Major igitur est D quam F. Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse; et si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur et in eâdem proportione: ex æquali autem prima major sit quam tertia; et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. *Q. E. D.*

[XXI.]

## PROP. XXI. THEOR.

*Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur et in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali prima major sit quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.*

Sint tres magnitudines proportionales A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales D, E, F; quæ, binæ sumptæ, in eâdem sint proportione. Sit autem perturbata earum analogia; videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A major sit quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.



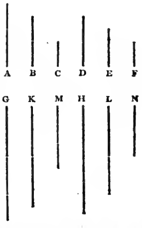

Quoniam enim major est A quam C, alia
[r] 8. hujus. vero est B; habebit[r] A ad B majorem proportionem quam C ad B. Sed ut A ad B, ita E ad F; et invertendo ut C ad B, ita E ad D. Quare et E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionem habet,
[s] 10. hujus. illa minor est[s]. Minor igitur est F quam D; ac propterea D quam F major erit. Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F esse æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur et in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali autem prima major sit quam tertia: et quarta quam sexta major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

*Si ſint quotcunque magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eâdem proportione; et ex æquali in eâdem proportione erunt.*

Sint quotcunque magnitudines A, B, C, et aliæ ipſis numero æquales D, E, F, binæ ſumptæ in eâdem proportione; hoc eſt, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eâdem proportione eſſe, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipſarum quidem A, D utcunque æquimultiplices G, H; ipſarum vero B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L, et ipſarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, et ſumptæ ſunt ipſarum A, D æquimultiplices G, H, et ipſarum B, E aliæ utcunque æquimultiplices K, L; erit ut[t] G ad K, ita H ad L. Eâdem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. Et cum ſint tres magnitudines G, K, M, et aliæ ipſis numero æquales H, L, N, binæ ſumptæ et in eâdem proportione; ex æquali[u] ſi G ſuperat M, et H ipſam N ſuperabit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Suntque G, H ipſarum A, D æquimultiplices, et M, N ipſarum C, F aliæ utcunque æquimultiplices. Ut igitur A ad C, ita erit[w] D ad F. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, et aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eâdem proportione, et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*



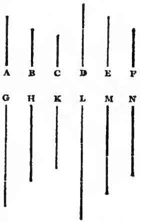

[t] 4. hujus.
[u] 20. hujus.
[w] Def. 5. hujus.

PROP.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

*Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione; sit autem perturbata earum analogia: et ex æquali in eâdem proportione erunt.*

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eâdem proportione, D, E, F; sit autem perturbata earum analogia, hoc est, sit ut A ad B, ita E ad F, et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A, B, D utcunque æquimultiplices G, H, L: ipsarum vero C, E, F aliæ utcunque æquimultiplices K, M, N. Et quoniam G, H æquimultiplices sunt ipsarum A, B, partes autem eandem habent proportionem, quam habent ipsarum æquimultiplices: erit [x] ut A ad B, ita G ad H. Et simili ratione ut E ad F, ita M ad N.




[x] 15. hujus.

Atque est ut A ad B, ita E ad F. Ut [y] igitur G ad H, ita M ad N. Rursus quoniam est ut B ad C, ita D ad E, et sumptæ sunt ipsarum B, D æquimultiplices H, L, ipsarum vero C, E aliæ utcunque æquimultiplices K, M: erit ut H ad K, ita L ad M. Ostensum autem est et ut G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines sunt G, H, K, et aliæ ipsis numero æquales L, M, N, binæ sumptæ in eâdem proportione, estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali, si [z] G superat K, et L ipsam N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sunt autem G, L ipsarum A, D æquimultiplices; et K, N æquimultiplices ipsarum C, F. Ut igitur [a] A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eâdem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eâdem proportione erunt. *Q. E. D.*

[y] 11. hujus.

[z] 21. hujus.

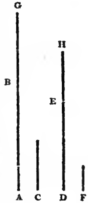
[a] Def. 5. hujus.

PROP.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Si prima ad ſecundam eandem babeat proportionem, quam tertia ad quartam; babeat autem et quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam; et compoſita prima cum quintâ ad ſecundam eandem proportionem babebit, quam tertia cum ſextâ ad quartam.*

Prima A B ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. Habeat autem et quinta B G ad ſecundam C proportionem eandem, quam ſexta E H ad quartam F. Dico et compoſitam primam cum quintâ A G ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum ſextâ D H ad quartam F. Quoniam enim eſt ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. Et quoniam ut A B ad C, ita eſt D E ad F: ut autem C ad B G, ita F ad E H; erit[b], ex æquali, ut A B ad B G, ita D E ad E H. Quod cum diviſæ magnitudines ſint proportionales, et compoſitæ proportionales[c] erunt. Ut igitur A G ad G B, ita eſt D H ad H E. Sed et ut [d] G B ad C, ita H E ad F. Ergo, ex [b] æquali, ut A G ad C, ita erit D H ad F. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam; et compoſita prima cum quintâ ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum ſextâ ad quartam. *Q. E. D.*




[b] 22. hujus.

[c] 18. hujus.

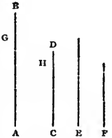
[d] Hypoth.

PROP.

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

*Si quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.*

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, E, F; et sit ut A B ad C D, ita E ad F. Sit autem maxima ipsarum A B, et F minima. Dico A B et F ipsis C D, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis A G, ipsi vero F æqualis C H. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; estque A G æqualis E, et C H æqualis F; crit ut A B ad D C, ita A G ad C H. Et quoniam ut tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam C H; et reliqua G B ad reliquam H D erit ut tota A B ad C D totam[e]. Et permutando G B ad A B ad H D ad C D[f]. Major autem est A B quam C D. Ergo et G B quam H D major erit[g]. Quod cum A G sit æqualis ipsi E, et C H ipsi F; erunt A G et F ipsi C H et E æquales. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. Ergo G B, H D inæqualibus existentibus, quippe cum G B sit major, si ipsi quidem G B addantur A G et F, ipsi vero H D addantur C H et E: fient A B et F ipsis C D et E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales; maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt. *Q. E. D.*




[e] 19. hujus.
[f] 16. hujus.
[g] 14. hujus.

# EUCLIDIS

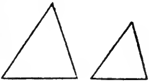
## ELEMENTORUM

## LIBER SEXTUS.

### DEFINITIONES.

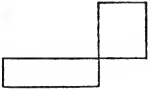
Definitio I.

Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ et ſingulos angulos æquales habent, et circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utrâque figurâ antecedentes, et conſequentes rationum fuerint termini.



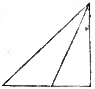
III.

Extremâ ac mediâ ratione ſecari recta linea dicitur, quando ſit ut tota ad majus ſegmentum, ita majus ſegmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ a vertice ad basim ducitur.



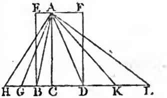
V.

Si fuerint plures magnitudines ejusdem generis, ratio primæ ad ultimam componi dicitur ex rationibus omnibus intermediis.

[I.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

*Triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.*

Sint triangula quidem A B C, A C D, parallelogramma vero E C, C F, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad B D ductam. Dico ut basis B C ad C D basim, ita esse triangulum A B C ad triangulum A C D, et parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum.




Producatur B D ex utrâque parte ad puncta H, L; et ipsi quidem B C basi æquales quotcunque ponantur B G, G H; ipsi vero basi C D ponantur quotcunque æquales D K, K L; et A G, A H, A K, A L jungantur. Quoniam igitur C B, B G, G H inter se æquales sunt, erunt et triangula A H G, A G B, A B C inter [a] se æqualia. Ergo quotuplex est basis H C ipsius B C basis, totuplex est A H C triangulum trianguli A B C. Eâdem ratione quotuplex est L C basis ipsius basis C D, totuplex est triangulum A L C ipsius A C D trianguli; et si æqualis est H C basis basi C L, et triangulum A H C triangulo A L C est [a] æquale; et si basis H C basim C L superat, et triangulum A H C superabit triangulum A L C; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus B C, C D, et duobus triangulis A B C, A C D, sumpta sunt æquimultiplicia basis quidem B C, et A B C trianguli, videlicet basis H C, et A H C triangulum:

[a] 38. primi.

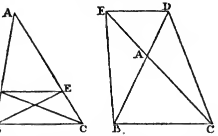
angulum: basis vero C D, et trianguli A C D, alia utcunque æquimultiplicia, nempe C L basis, et A L C triangulum; atque ostensum est, si H C basis basim C L superat, et triangulum A H C superare triangulum A L C; et si æqualis, æquale; et si minor, minus. Est igitur [b] ut B C basis ad basim C D, ita triangulum A B C ad A C D triangulum. Et quoniam trianguli A B C duplum est [c] parallelogrammum E C, et trianguli A C D parallelogrammum F C duplum [d], partes autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis B C ad C D basim, ita esse A B C triangulum ad triangulum A C D; ut autem A B C triangulum ad triangulum A C D, ita parallelogrammum E C ad C F parallelogrammum; erit [e] ut B C basis ad basim C D, ita parallelogrammum E C ad F C parallelogrammum. Quare triangula, et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Q. E. D.

[b] Def. 5. quinti.
[c] 41. primi.
[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.

## PROP. II. THEOR. [II.]

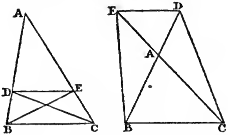
*Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.*

Trianguli enim A B C uni laterum B C parallela ducatur D E. Dico ut D B ad D A, ita esse C E ad E A.



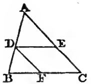

Jungantur B E, C D. Triangulum igitur B D E triangulo C D E est [f] æquale, in eâdem enim sunt basi D E, et in

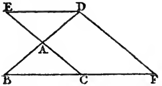
[f] 37. primi.




in eisdem D E et B C parallelis; aliud autem triangulum
[g] 7. quinti. est A D E: sed æqualia ad idem eandem habent [g] proportionem; ergo ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita est C D E triangulum ad triangulum A D E.
[h] 1. hujus. Ut autem triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [h] est B D ad D A; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem a puncto E ad A B ductam, inter se sunt ut bases. Et ob eandem causam ut C D E triangulum ad triangulum A D E, ita C E ad E A. Et
[i] 11. quinti. igitur ut B D ad D A, ita est [i] C E ad E A. Et si trianguli A B C latera A B, A C proportionaliter secta sint, *i. e.* si ut B D ad D A, ita sit C E ad E A; et jungatur D E: dico D E ipsi B C parallelam esse. Iisdem constructis, quoniam est ut B D ad D A, ita C E ad E A; ut autem B D ad D A, ita [h] est B D E triangulum ad triangulum A D E; et ut C E ad E A, ita C D E triangulum [h] ad triangulum A D E, erit ut triangulum B D E ad triangulum A D E, ita [i] C D E triangulum ad triangulum A D E. Quod cum utrumque triangulorum B D E, C D E ad triangulum A D E eandem habeat proportionem; erit B D E trian-
[k] 9. quinti. gulum [k] triangulo C D E æquale; et sunt in eâdem basi D E. Æqualia autem triangula, et in eâdem basi con-
[l] 39. primi. stituta, etiam in eisdem [l] sunt parallelis. Ergo D E ipsi B C parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. *Q. E. D.*

*Cor.* * Recta D E, basi trianguli A B C parallela, lateribus A B, A C (si opus sit productis) in punctis D, E occurrens triangulum A D E constituit triangulo A B C simile, et homologa




mologa ſunt latera, quæ ſunt in eâdem rectâ. Et ſi recta D E, lateribus trianguli A B C in punctis D, E occurrens, conſtituat triangulum A D E ipſi A B C ſimile, et latera homologa ſint in eâdem rectâ; recta D E baſi B C parallela erit. Angulus enim A triangulis duobus B A C, D A E communis eſt. Et ſi D E baſi B C parallela ſit, erit angulus A D E angulo A B C, necnon A E D angulus angulo A C B, æqualis [m]. Æquiangula igitur ſunt triangula A B C, A D E. Et cum B D ſit ad D A ut C E ad E A [n], componendo vel dividendo, erit B A ad A D ut C A ad A E [o]. Permutando B A ad A C ut A D ad A E. Triangulorum igitur B A C, D A E latera, circa angulum communem A, ſunt proportionalia. Agatur jam per punctum D recta D F, ipſi A C parallela, quæ baſi B C (ſi opus ſit productæ) in F occurrat. Erit B F ad F C ut B D ad D A [n]. Componendo igitur vel dividendo, B C ad C F ut B A ad A D [o]. Figura autem D E C F eſt parallelogrammum. Recta igitur F C rectæ D E æqualis eſt [p]. Rectæ igitur B C ad E D eadem, quæ ad F C, eſt proportio [q]. Quare B C ad D E ut B A ad A D [r]. Permutando B C ad B A ut D E ad A D [s]. Triangulorum igitur A B C, A D E latera, circa angulos æquales A B C, A D E, ſunt proportionalia. Denique cum B C ſit ad B A ut D E ad D A, et B A ad A C ut D A ad A E (id enim prius oſtenſum) ex æquo erit B C ad A C ut D E ad A E. Triangulorum igitur A B C, A D E latera, circa æquales angulos A C B, A E D, ſunt proportionalia. Triangula igitur A B C, A D E ſunt æquiangula, et latera circa æquales angulos proportionalia habent. Similia igitur ſunt triangula A B C, A D E, et latera ſunt homologa, quæ in eâdem ſunt rectâ. Quod primum demonſtrandum erat.

[m] 29. primi.
[n] Per hanc Prop.
[o] 18. vel 17. quinti.
[p] 34. primi.
[q] 7. quinti.
[r] 11. quinti.
[s] 16. quinti.

Jam vero recta D E, lateribus trianguli A B C in punctis D, E occurrens, conſtituat triangulum A D E ſimile triangulo A B C, et homologa ſint latera, quæ ſunt in eâdem rectâ. Nempe A B ad A D, ut A C ad A E. Dico rectam D E

trianguli A B C basi B C esse parallelam. Nam cum similia sint triangula A B C, A D E, æquiangula erunt. Et æquales erunt anguli, circa quos latera sunt proportionalia[t]. Angulus igitur A D E angulo A B C æqualis. Recta igitur D E rectæ B C parallela[u]. *Q. E. D.*

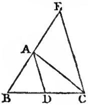
[t] Def. 1. hujus.
[u] 28. primi.

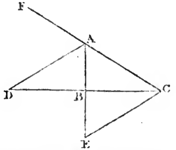
## [III.] PROP. III. THEOR.

*Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera; et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.*

Sit triangulum A B C; et secetur angulus B A C (vel externus B A F) bifariam[x] rectâ lineâ A D. Dico ut B D ad D C, ita esse B A ad A C. Ducatur per C ipsi D A parallela[y] C E, et producta B A conveniat cum ipsâ in E puncto.

[x] 9. primi.




[y] 31. primi.

Quoniam igitur in parallelas A D, E C incidit recta linea quædam A C; erit[z] A C E angulus angulo C A D (vel adjacenti D A F, si externus sit angulus, quem A D medium dividit) æqualis. Sed C A D angulus (vel D A F) ponitur æqualis angulo B A D. Ergo et B A D ipsi A C E angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas A D, E C recta linea B A E incidit, angulus B A D æqualis est A E C. Ostensus autem est et angulus A C E angulo B A D æqualis. Ergo et A C E ipsi A E C æqualis erit: ac propterea latus A E æquale[a] lateri A C. Et quoniam uni laterum trianguli B C E, videlicet ipsi E C, parallela ducta est A D; erit[b] ut B D ad D C, ita B A ad A E; æqualis autem

[z] 29. primi.
[a] 6. primi.
[b] 2. hujus.

autem est A E ipsi A C. Est igitur[c] ut B D ad D C, ita [c] 7. quinti.
B A ad A C. Et si sit ut B D ad D C, ita B A ad A C, et A D jungatur; dico angulum B A C (vel externum B A F, si punctum D sit extra triangulum) bifariam sectum esse rectâ lineâ A D. Iisdem enim constructis, quoniam est ut B D ad D C, ita B A ad A C; sed et ut B D ad D C, ita[d] B A ad A E, etenim uni laterum trianguli BCE, [d] 2. hujus.
videlicet ipsi E C, parallela ducta est A D; erit et ut B A ad A C, ita B A ad A E[e]. Ergo A C est [f] æqualis A E; ac [e] 11. quinti. [f] 9. quinti.
propterea, et angulus A E C angulo E C A æqualis[g]. Sed [g] 5. primi.
angulus quidem A E C est æqualis[h] angulo B A D; an- [h] 29. primi.
gulus vero A C E æqualis[h] C A D (vel D A F.) Quare et B A D angulus ipsi C A D (vel D A F) æqualis erit. Angulus igitur B A C (vel externus B A F) bifariam sectus est rectâ lineâ A D. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. Et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. *Q. E. D.*

SCHOLION.*

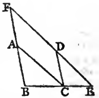
Hanc propositionem tam de externis, quam internis triangulorum angulis accepisse veteres, certissimum est. Quorum utique nemo eam de externo demonstrare aggressus est; tanquam ab Euclide demonstratam usurpant omnes. Neque minus generaliter accipiendam esse Euclides ipse significavit, cum tali eam conditione subjecerit, ἐὰν ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν: Quasi illud perspectum habuerit, rectam, quæ angulum dividat, non semper occursuram basi. Atqui basi nequit non occurrere, quæ internum dividit. Quæ medium dividit externum, ita basi occurret, si crura trianguli inæqualia sint. Nam si isosceles fuerit triangulum, quæ angulum, qui ad verticem externus est, medium dividit linea recta, basi parallela erit.



PROP.

[IV.] PROP. IV. THEOR.

*Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos sunt, proportionalia sunt; et homologa, sive ejusdem nominis, sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.*




Sint æquiangula triangula A B C, D C E, quæ angulum quidem A B C angulo D C E, angulum vero A C B angulo D E C æqualem habeant, et præterea angulum B A C angulo C D E. Dico triangulorum A B C, D C E proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos; et homologa, sive ejusdem nominis, latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Ponatur B C in directum ipsi C E. Et quoniam anguli A B C, A C B duobus rectis minores [f] sunt, æqualis autem est angulus A C B angulo D E C; erunt A B C, D E C anguli duobus rectis minores. Quare B A, E D productæ inter se convenient [g]; producantur, et conveniant in puncto F. Et quoniam angulus D C E est æqualis angulo A B C; erit [h] B F ipsi D C parallela. Rursus quoniam æqualis est angulus A C B angulo D E C, parallela [h] erit A C ipsi F E. Parallelogrammum igitur est F A C D; ac propterea F A quidem ipsi C D, A C vero ipsi F D, est [i] æqualis. Et quoniam uni laterum trianguli F B E, videlicet ipsi F E, parallela ducta est A C; erit [k] ut B A ad A F, ita B C ad C E. Æqualis autem est A F ipsi C D. Ut igitur B A ad C D, ita B C ad C E; et permutando, ut B A ad B C, ita C D ad C E. Rursus quoniam C D parallela est B F, erit [k] ut B C ad C E, ita F D ad D E. Sed F D est æqualis A C. Ergo ut [l] B C ad C E, ita A C ad D E. Permutando igitur, ut B C ad C A, ita C E ad E D. Itaque quoniam ostensum est, ut A B ad B C ita D C ad C E, ut autem B C ad C A ita C E ad E D: erit, [m] ex æquali, ut B A ad A C ita C D ad D E. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; et homologa, sive ejusdem nominis, latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. *Q. E. D.*

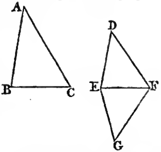
f 17. primi.
g 12. ax. primi.
h 28. primi.
i 34. primi.
k 2. hujus.
l 7. quinti.
m 22. quinti.

PROP.

## PROP. V. THEOR. [V.]

*Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.*

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ latera proportionalia habeant; hoc eſt, ſit ut A B quidem ad B C, ita D E ad E F: ut autem B C ad C A, ita E F ad F D; et adhuc ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe, et æquales habere angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur; angulum quidem A B C angulo




D E F, angulum vero B C A angulo E F D, et prætereа angulum B A C angulo E D F. Conſtituatur enim[a] ad rectam lineam E F, et ad puncta in ipſâ E, F, angulo quidem A B C æqualis angulus F E G; angulo autem B C A angulus E F G. Quare reliquus B A C angulus[o] reliquo E G F eſt æqualis. Ideoque æquiangulum eſt triangulum A B C triangulo E G F. Triangulorum igitur A B C, E G F proportionalia ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ergo ut A B ad B C[p], ita G E ad E F. Sed ut A B ad B C, ita D E ad E F. Ut igitur D E ad E F, ita[q] G E ad E F. Quod cum utraque ipſarum D E, E G ad E F eandem proportionem habeat, erit[r] D E ipſi E G æqualis. Eâdem ratione et D F æqualis F G. Itaque quoniam D E eſt æqualis E G, communis autem E F; duæ D E, E F duabus G E, E F æquales ſunt, et baſis D F baſi F G æqualis. Angulus igitur D E F eſt æqualis[s] angulo G E F, et D E F triangulum æquale triangulo G E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus quidem E D F æqualis angulo E G F. Et quoniam angulus D E F eſt æqualis angulo G E F, et angulus G E F angulo A B C; erit et angulus A B C angulo F E D æqualis. Eâdem ratione et angulus A C B æqualis eſt angulo D F E; et adhuc angulus ad A angulo ad D. Ergo A B C triangulum triangulo

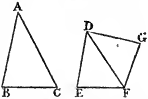
[a] 23. primi.
[o] 2. Cor. 32. primi.
[p] 4. hujus.
[q] 11. quinti.
[r] 9. quinti.
[s] 8. primi.

angulo D E F æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.*

Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum B A C uni angulo E D F æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; hoc eſt, ſit ut B A ad A C, ita E D ad D F. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum eſſe, et angulum quidem



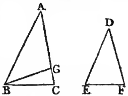

A B C habere æqualem angulo D E F; angulum vero A C B angulo D F E. Conſtituatur [t] enim ad rectam lineam D F, et ad puncta in ipſa D, F, alterutri angulorum B A C, E D F æqualis angulus F D G, angulo autem A C B æqualis D F G. Reliquus igitur ad B reliquo ad G eſt [u] æqualis. Ergo triangulum A B C triangulo D G F æquiangulum eſt; ac propterea ut B A ad A C, ita [x] eſt G D ad D F: ponitur autem et ut B A ad A C, ita E D ad D F. Ut igitur [y] E D ad D F, ita G D ad D F. Quare E D æqualis eſt [z] ipſi D G, et communis D F. Ergo duæ E D, D F duabus G D, D F æquales ſunt, et angulus E D F angulo G D F eſt æqualis; baſis igitur E F eſt [a] æqualis baſi F G, triangulumque D E F æquale triangulo G D F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. Ergo angulus quidem D F G eſt æqualis angulo D F E; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus D F G æqualis eſt angulo A C B; et angulus igitur A C B angulo D F E eſt æqualis. Ponitur autem et B A C angulus æqualis angulo E D F. Ergo et reliquus, qui ad B, æqualis eſt reliquo ad E. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B C triangulo D E F. Quare ſi duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa

[t] 23. primi.
[u] 2. Cor. 32. primi.
[x] 4. hujus.
[y] 11. quinti.
[z] 9. quinti.
[a] 4. primi.

circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. *Q. E. D.*

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.*




Sint duo triangula A B C, D E F, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum B A C angulo E D F æqualem, circa alios autem angulos A B C, D E F latera proportionalia, ut sit D E ad E F, sicut A B ad B C; et reliquorum, qui ad C, F, utrumque simul minorem, vel non minorem recto. Dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum esse; angulumque A B C æqualem angulo D E F, et reliquum, videlicet qui ad C, reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus A B C angulo D E F, unus ipsorum major erit; sit major A B C; et constituatur [b] ad rectam lineam A B, et ad punctum in ipsâ B, angulo D E F æqualis angulus A B G. Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero A B G angulo D E F; erit reliquus A G B reliquo D F E æqualis [c]. Æquiangulum igitur est A B G triangulum triangulo D E F. Quare ut [d] A B ad B G, sic D E ad E F: utque D E ad E F, sic ponitur A B ad B C. Ut igitur A B ad B C, sic A B ad B G. Quod cum A B ad utramque B C, B G eandem habeat proportionem, erit B C ipsi B G æqualis [e]; ac propterea angulus ad C est æqualis angulo B G C. Quare uterque angulorum B C G, B G C minor est recto; igitur qui ei deinceps est, A G B, major est recto. Atque ostensus est angulus A G B æqualis angulo, qui ad F. Angulus igitur, qui ad F, recto major est. Atqui ponitur non major, nimirum cum C non est major recto: quod est absurdum. Non igitur inæqualis est angulus A B C angulo D E F. Ergo ipsi est æqualis. Est autem et angulus ad A æqualis ei, qui ad D. Quare et reliquus qui ad C, æqualis reliquo, qui ad

[b] 23. primi.
[c] 2. Cor. 32. primi.
[d] 4. hujus.
[e] 9. quinti.



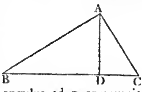
ad

ad F. Æquiangulum igitur eſt A B C triangulum triangulo D E F. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrunque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. *Q. E. D.*

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

*Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe ſimilia ſunt.*

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C; et a puncto A ad B C perpendicularis ducatur A D. Dico triangula A B D, A D C toti triangulo A B C, et inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B A C eſt æqualis angulo A D B,




rectus enim uterque eſt, et angulus ad B communis duobus triangulis A B C, A B D; erit [g] reliquus A C B reliquo B A D æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B C triangulo A B D. Quare [h] ut B C, quæ ſubtendit angulum rectum trianguli A B C, ad B A ſubtendentem angulum rectum trianguli A B D, ſic ipſa A B, ſubtendens angulum ad C trianguli A B C, ad D B ſubtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet B A D ipſius A B D trianguli; et adhuc A C ad A D ſubtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. Ergo triangulum A B C triangulo A B D æquiangulum eſt, et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur [i] eſt triangulum A B C triangulo A B D. Eâdem ratione demonſtrabimus etiam A D C triangulum triangulo A B C ſimile eſſe. Quare utrumque ipſorum A B D, A D C toti A B C triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula A B D, A D C etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus B D A rectus eſt æqualis recto A D C; ſed et B A D oſtenſus eſt æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo D A C æqualis. Æquiangulum igitur eſt triangulum A B D triangulo A D C. Ergo [h] ut B D trianguli A B D ſubtendens B A D angulum, ad D A trianguli A D C ſubtendentem angulum, qui eſt ad C, æqualem

[g] 2. Cor. 32. primi.

[h] 4. hujus.

[i] Def. 1. hujus.

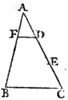
æqualem angulo B A D, ſic ipſa A D trianguli A B D ſubtendens angulum ad B, ad D C ſubtendentem angulum D A C ei, qui eſt ad B, æqualem; et adhuc B A ad A C ſubtendentem angulum rectum A D C. Simile igitur eſt A B D triangulum triangulo A D C. Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, et toti, et inter ſe ſimilia ſunt. *Q. E. D.*

*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad baſim perpendicularem ductam, mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis; et præterea inter baſim et baſis ſegmentum, latus utrumlibet ſegmento conterminum, medium eſſe proportionale.

## PROP. IX. PROBL. [IX.]

*A datâ rectâ lineâ imperatam partem abſcindere.*

Sit data recta linea A B. Oportet ab ipſâ A B imperatam partem abſcindere. Ducatur a puncto A quædam recta linea A C, quæ cum ipſâ A B angulum quemlibet contineat; ſumaturque in A C quodvis punctum D, et capiatur A C, quæ toties ſit multiplex rectæ A D, quoties recta ipſa A B partis abſcindendæ; jungatur B C; et per D ipſi B C parallela [k] ducatur D F. Itaque quoniam uni laterum trianguli A B C, videlicet ipſi B C, parallela ducta eſt F D; erit [l] ut C D ad D A, ita [l] B F ad F A; componendo ut C A ad A D, ita B A ad A F [m]. Quæ pars igitur eſt A D rectæ A C, eadem erit A F rectæ A B [n]. A datâ igitur rectâ lineâ A B pars imperata eſt [n] abſciſſa A F. *Q. E. F.*



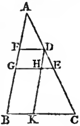

k 31. primi.
l 2. hujus.
m 18. quinti.
n 15. quinti.

## PROP. X. PROBL. [X.]

*Datam rectam lineam inſectam, datæ rectæ lineæ ſectæ ſimiliter ſecare.*

Sit data quidem recta linea inſecta A B, ſecta vero A C. Oportet rectam lineam A B inſectam ipſi A C ſectæ ſimiliter ſecare. Sit ſecta A C in punctis D et E; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; junctâque B C, per puncta quidem D et E ipſi B C parallelæ [o] ducantur D F, E G; per D vero ipſi A B ducatur parallela D H K. [o] 31. primi.

D H K. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum
* 34. primi. F H, H B: ac propterea D H quidem est * æqualis F G, H K vero ipsi G B. Et quoniam uni laterum trianguli D K C, ipsi scilicet K C, parallela ducta est H E;
† 2. hujus. erit † ut C E ad E D, ita K H ad H D. Æqualis autem est K H quidem ipsi B G, H D vero ipsi G F. Est igitur ut C E ad E D, ita B G ad G F. Rursus quoniam uni laterum trianguli A G E, nimirum ipsi E G, parallela ducta est F D, ut E D ad D A, ita † erit G F ad F A. Sed ostensum est ut C E ad E D, ita esse B G ad G F. Ut igitur C E ad E D, ita est B G ad G F; et ut E D ad D A, ita G F ad F A. Ergo data recta linea insecta A B, datæ rectæ lineæ sectæ A C similiter secta est. *Q. E. F.*

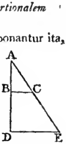



## [XI.] PROP. XI. PROBL.

To find a third proportional to two given straight lines.

*Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.*

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, A C; et ponantur ita, ut angulum quemvis contineant. Oportet ipsis A B, A C tertiam proportionalem invenire. Producantur A B, A C ad puncta D, E; ponaturque ipsi A C æqualis B D; et
* 31. primi. junctâ B C, ducatur * per D ipsi B C parallela D E. Quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E, parallela
† 2. hujus. ducta est B C, erit † ut A B ad B D, ita A C ad C E. Æqualis autem est B D ipsi A C. Ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. Quare datis rectis lineis A B, A C tertia proportionalis inventa est C E. *Q. E. F.*




## [XII.] PROP. XII. PROBL.

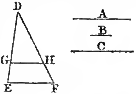
To find a fourth proportional to three given straight lines.

*Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.*

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C. Oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E, D F angulum quemvis E D F continentes; et ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, et ipsi C æqualis D H: junctâque

G H,

G H, per E ipsi parallela [a] ducatur E F. Itaque quoniam [a 31. primi.] uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E ita D H ad H F. Est autem D G ipsi A æqualis; G E vero æqualis B; et D H æqualis C. Ut igitur A ad B, ita C ad H F. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est H F. *Q. E. F.*



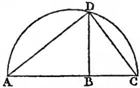

## PROP. XIII. PROBL. [XIII.]

*Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.*

To find a mean proportional between 2 given straight lines.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, B C. Oportet inter ipsas A B, B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, et super ipsâ A C describatur semicirculus A D C; ducaturque [x] a puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D; et A D, D C jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus A D C, is rectus [y] est. Et quoniam in triangulo rectangulo A D C, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est D B; erit D B media proportionalis [z] inter segmenta basis A B, B C. Duabus igitur datis rectis lineis A B, B C media proportionalis inventa est D B. *Q. E. F.*

[x 11. primi.] [y 31. tertii.] [z Cor. 8. hujus.]




## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt; et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.*

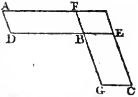
reciprocally proportional

Sint æqualia parallelogramma A B, B C, æquales habentia angulos ad B; et ponantur in directum D B, B E. Ergo et in directum [a] erunt F B, B G. Dico parallelogrammorum A B, B C latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca esse: hoc est, ut D B ad B E ita esse

[a 14. primi.]

G B

G B ad B F. Compleatur enim parallelogrammum F E. Et quoniam parallelogrammum A B æquale eſt parallelogrammo B C, aliud autem aliquod eſt F E parallelogrammum; erit ut A B ad F E [b], ita B C ad F E. Sed ut A B quidem ad F E, ita [c] eſt D B ad B E; ut autem B C ad F E, ita [c] G B ad B F; ut igitur [d] D B ad B E, ita G B ad B F. Ergo parallelogrammorum A B, B C latera, quæ circum æquales angulos, ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondent. Et ſi reciproca ſint, ſeu ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondeant, latera, quæ ſunt circum æquales angulos, nempe ſi ut B D ad B E, ita ſit G B ad B F; dico parallelogrammum A B parallelogrammo B C æquale eſſe. Quoniam enim eſt ut D B ad B E, ita G B ad B F, ut autem D B ad B E, ita [c] A B parallelogrammum ad parallelogrammum F E; et ut G B ad B F, ita [c] B C parallelogrammum ad parallelogrammum F E; erit [d] et ut A B ad F E, ita B C ad F E. [e] Æquale igitur eſt A B parallelogrammum parallelogrammo B C. Ergo æqualium et unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ſeu ex contrariâ parte ſibi ipſis reſpondent; et quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt; ea inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*



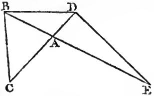

[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 9. quinti.

[XV.] PROP. XV. THEOR.

*Æqualium, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia.*

Sint æqualia triangula A B C, A D E, unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet B A C angulo D A E. Dico triangulorum A B C, A D E latera, quæ circum æquales angulos, reciproca eſſe, hoc eſt, ut C A ad A D, ita eſſe E A ad A B. Ponantur enim ita, ut in directum ſit C A ipſi A D. Ergo et E A ipſi A B in directum erit; et jungatur B D. Quoniam igitur triangulum A B C æquale eſt triangulo A D E, aliud autem eſt

eſt A B D; erit ut C A B triangulum ad triangulum B A D, ita [d] triangulum A D E ad triangulum B A D. d 7. quinti.

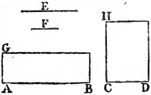



Sed ut triangulum quidem C A B ad B A D triangulum, ita [e] C A ad A D; e 1. hujus. ut autem triangulum E A D ad ipſum B A D, ita E A ad A B. Ut [f] igitur C A ad A D, ita E A ad A B. f 11. quinti. Quare triangulorum A B C, A D E latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt. Et ſi reciproca ſint latera triangulorum A B C, A D E, ſcil. ſit ut C A ad A D, ita E A ad A B; dico triangulum A B C triangulo A D E æquale eſſe. Junctâ enim rurſus B D, quoniam ut C A ad A D, ita eſt E A ad A B; ut autem C A ad A D, ita [e] A B C triangulum ad triangulum B A D; et ut E A ad A B, ita [e] triangulum E A D ad B A D triangulum, erit ut A B C triangulum ad triangulum B A D, ita triangulum E A D ad B A D triangulum. Utrumque igitur triangulorum A B C, A D E ad triangulum B A D eandem habet proportionem; ac propterea æquale eſt A B C triangulum triangulo A D E [d]. Æqualium igitur, et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt: et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca ſunt, ea inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub mediis continetur: et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.*

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E, F, ſitque ut A B ad C D, ita E ad F. Dico rectangulum contentum ſub rectis lineis A B, F æquale eſſe ei, quod ſub ipſis C D, E continetur. Ducantur enim a [g] punctis A, C ipſis A B, C D ad rectos angulos A G, C H; g 11. primi.

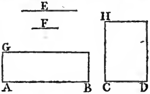



ponaturque

If four straight lines be proportionals the Rectangle contained by the extremes is equal to the rectangle contained by the means & the Converse.

Simson

ponaturque ipsi quidem F æqualis A G, ipsi vero E æqualis C H; et compleantur B G, D H parallelogramma. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; est autem E æqualis C H, et F ipsi A G: erit [g] ut A B ad C D, ita C H ad A G. Parallelogrammorum igitur B G, D H latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se sunt [h] æqualia. Ergo parallelogrammum B G æquale est parallelogrammo D H. Atque est parallelogrammum quidem B G, quod sub rectis lineis A B, F continetur, etenim A G est æqualis F; parallelogrammum vero D H, quod continetur sub ipsis C D, E; cum C H ipsi E sit æqualis. Rectangulum igitur contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub ipsis C D et E continetur. Et si rectangulum contentum sub A B, F sit æquale ei, quod sub C D et E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad C D, ita E ad F. Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum sub A B et F est æquale ei, quod sub C D et E continetur, atque est contentum quidem sub A B, F rectangulum B G, etenim A G est æqualis F: contentum vero sub C D, E est rectangulum D H, cum C H ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H. Et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt [g]. Quare ut A B ad C D, ita C H ad A G; æqualis autem est C H ipsi E, et A G ipsi F. Ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum sub extremis contentum æquale est ei, quod sub mediis continetur: et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*




[g] 7. quinti.

[h] 14. hujus.

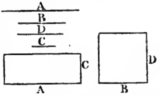
*Cor.* * Si quatuor rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione tertiæ ad quartam; rectangulum sub extremis rectangulo sub mediis majus erit. Et si rectangulum

rectangulum ſub extremis majus fuerit rectangulo ſub mediis; prima major erit quam ad ſecundam in ratione tertiæ ad quartam.

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum ſub extremis contentum æquale eſt ei, quod a mediâ fit, quadrato: et ſi rectangulum ſub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.*

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; et ſit ut A ad B ita B ad C. Dico rectangulum contentum ſub A, C æquale eſſe ei, quod a mediâ B fit, quadrato. Ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C; æqualis autem B ipſi D;




erit ut A ad B [h], ita D ad C. Si autem quatuor rectæ [h] lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis contentum eſt [l] æquale ei, quod ſub mediis continetur. [l] 7. quinti. 16. hujus. Ergo rectangulum ſub A, C contentum eſt æquale ei, quod continetur ſub B, D. Sed rectangulum contentum ſub B, D eſt æquale quadrato, quod fit ex ipſâ B; etenim B eſt æqualis D. Rectangulum igitur contentum ſub A, C eſt æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Et ſi rectangulum contentum ſub A, C æquale ſit quadrato, quod fit ex B; dico ut A ad B, ita eſſe B ad C. Iiſdem enim conſtructis: quoniam rectangulum contentum ſub A, C æquale eſt quadrato, quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum, quod ſub ipſis B, D continetur, eſt enim B æqualis ipſi D; erit rectangulum contentum ſub A, C æquale ei, quod ſub B, D continetur. Si autem rectangulum, ſub extremis contentum, æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales [l] erunt. Eſt igitur ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipſi D. Ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint; rectangulum ſub extremis contentum eſt æquale ei, quod a mediâ fit, quadrato: et ſi rectangulum ſub extremis contentum æquale fuerit ei, quod a mediâ fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt. Q. E. D.

Cor.

If three straight lines be proportionals the Rectangle contained by the extremes is equal to the Square of the mean. & the Converse.

Simson

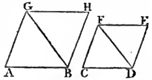
*Cor.* * Si trium rectarum prima major sit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam; rectangulum sub extremis quadrato a mediâ majus erit. Et si rectangulum sub extremis majus fuerit quadrato a mediâ; prima major erit quam ad secundam in ratione secundæ ad tertiam.

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

similarly situated Simson

*A datâ rectâ lineâ, dato rectilineo simile et similiter positum, rectilineum describere.*

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. Oportet a rectâ lineâ A B, rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum describere. Jungatur D F, et ad rectam lineam A B, et ad puncta in ipsâ A, B, angulo quidem C æ-




qualis angulus [k] constituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. Reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B est [l] æqualis. Ergo æquiangulum est F C D triangulum triangulo G A B; ac propterea [m] ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B. Rursus constituatur ad rectam lineam B G, et ad puncta in ipsâ B, G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo autem F D E æqualis G B H. Ergo reliquus [l] ad E reliquo ad H est æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum F D E triangulo G B H. Quare ut [m] F D ad G B, ita F E ad G H, et E D ad H B. Ostensum autem est et ut F D ad G B, ita F C ad G A, et C D ad A B; est igitur [n] ut F C ad A G, ita C D ad A B, et F E ad G H, et adhuc E D ad H B. Itaque quoniam angulus quidem C F D est æqualis angulo A G B, angulus autem D F E angulo B G H; erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. Eâdem ratione et C D E est æqualis ipsi A B H; et præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. Æquiangulum igitur est A H ipsi C E, et latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum A H rectilineo C E simile [o] erit. A datâ igitur rectâ lineâ A B, dato rectilineo C E simile et similiter positum, rectilineum A H descriptum est. *Q. E. F.*

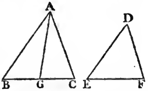
[k] 23. primi.
[l] 2. Cor. 32. primi.
[m] 4. hujus.
[n] 11. quinti.
[o] Def. 1. hujus.

PROP.

## PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

*Similia triangula inter se sunt in duplicatâ proportione laterum homologorum.*

Sint similia triangula A B C, D E F habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, et sit ut A B ad B C, ita D E ad E F, ita ut latus B C homologum sit lateri E F. Dico A B C triangulum ad triangulum D E F duplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F.




Sumatur enim ipsis [p] B C, E F tertia proportionalis B G, ut sit B C ad E F ita E F ad B G. Et jungatur G A. Quoniam igitur ut A B ad B C, ita est D E ad E F; erit permutando ut A B ad D E, ita B C ad E F. Sed ut B C ad E F, ita E F ad B G. Ut [q] igitur A B ad D E, ita E F ad B G. Quare triangulorum A B G, D E F latera, quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt. Quorum autem triangulorum, unum uni æqualem habentium angulum, latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, ea inter se æqualia [r] sunt. Æquale igitur est A B G triangulum triangulo D E F. Et quoniam est ut B C ad E F, ita E F ad B G; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [s] habet ejus, quam habet ad secundam: habebit igitur B C ad B G duplicatam proportionem ejus, quam habet B C ad E F. Ut autem B C ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G [t]. Ergo et A B C triangulum ad triangulum A B G duplicatam proportionem habet ejus, quam B C habet ad E F. Est autem A B G triangulum triangulo D E F æquale. Et triangulum igitur A B C ad triangulum D E F duplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Quare similia triangula inter se in duplicatâ sunt proportione laterum homologorum. *Q. E. D.*

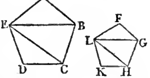
[p] 11. hujus.
[q] 11. quinti.
[r] 15. hujus.
[s] Def. 10. quinti.
[t] 1. hujus.

*Cor.* Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit a primâ, ad triangulum, quod a secundâ, simile et similiter descriptum; quoniam ostensum est ut C B ad B G, ita A B C triangulum ad triangulum A B G, hoc est, ad triangulum D E F. *Q. E. D.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

*Similia polygona in similia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus, quam latus habet ad homologum latus.*

Sint similia polygona ABCDE, FGHKL, et sit latus AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula dividi, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus, quam habet AB ad FG. Jungantur BE, EC, GL, LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE, FGL, unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æ-




t 6. hujus. quales autem angulos latera proportionalia: erit [t] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. Ergo et simile. Angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL.

u Def. 1. hujus. Est autem et totus ABC angulus æqualis [u] toti FGH, propter similitudinem polygonorum. Ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE, FGL, est ut EB ad BA, ita LG ad GF; sed et propter similitudinem polygonorum [u], ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali

x 22. quinti. ut [x] EB ad BC, ita LG ad GH. Hoc est, circum æquales angulos EBC, LGH latera triangulorum EBC, LGH sunt proportionalia; æquiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH. Quare et simile. Eâdem ratione et ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula dividuntur, et numero æqualia: nimirum cum tot sint utriusque polygoni triangula, quot sunt latera, duobus demptis. Dico et homologa totis; hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sunt ABE, EBC, ECD, consequentia autem ipsorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE polygonum ad polygonum

FGHKL

FGHKL duplicatam proportionem habere ejus, quam latus habet ad homologum latus; hoc eft, AB ad FG. Quoniam enim fimile eft ABE triangulum triangulo FGL; habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [y] ejus, quam habet BE ad GL. Eâdem [y] ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [y] proportionem habet ejus, quam BE ad GL. Eft [z] igitur ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita [z] triangulum BEC ad GLH triangulum. Rurfus quoniam fimile eft triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eâdem ratione et ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus, quam CE ad HL. Eft [z] igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. Oftenfum autem eft et ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, et triangulum ECD ad ipfum LHK. Et igitur ut unum antecedentium ad unum confequentium [a], fic omnia antecedentia ad omnia confequentia. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL; fed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus, quam latus AB habet ad homologum latus FG: fimilia enim triangula in duplicatâ funt proportione laterum homologorum. Ergo et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus, quam AB latus habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in fimilia triangula dividuntur, et numero æqualia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus ad homologum latus. *Q. E. D.*

[y] 19. hujus.

[z] 11. quinti.

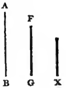
[a] 12. quinti.

Eodem modo et in fimilibus quadrilateris oftendetur, ea effe in duplicatâ proportione laterum homologorum. Oftenfum autem eft et triangulis.

*Cor.* 1. Ergo univerfe fimiles figuræ rectilineæ inter fe funt in duplicatâ proportione homologorum laterum.

*Cor.* 2. Univerfe igitur manifeftum eft, fi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita

esse figuram, quæ fit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter descriptam. Nam si ipsis A B, F G figurarum rectilinearum similium lateribus homologis tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit A B ad X duplicatam proportionem ejus, quam habet A B ad F G. Habet autem et figura ad figuram duplicatam proportionem ejus, quam latus A B ad latus homologum F G. Figura igitur ad figuram ut A B ad X. *Q. E. D.*




*Cor.* 3.* Si similes figuræ rectilineæ sint etiam æquales, earum latera homologa erunt inter se æqualia.

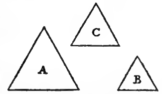
[XXI.]

## PROP. XXI. THEOR.

*Quæ eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.*

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C. Dico et rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi æquiangulum [b] erit, et circum æquales angulos latera habebit proportionalia.

[b] Def. 1. hujus.




Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, et circum æquales angulos latera proportionalia habebit [b]. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C æquiangulum est, et circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare et rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. *Q. E. D.*

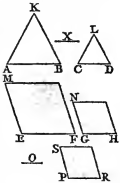
[XXII.]

## PROP. XXII. THEOR.

*Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipsis fiant, similia et similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia et similiter descripta, proportionalia fuerint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.*

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H: nempe ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. Describanturque

ſcribanturque [c] ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea K A B, L C D: ab ipſis vero E F, G H deſcribantur rectilinea ſimilia et ſimiliter poſita M F, N H. Dico ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſſe rectilineum M F ad ipſum N H rectilineum. Sumatur ipſis [d] quidem A B, C D tertia proportionalis X; ipſis vero E F, G H tertia proportionalis O. Et quoniam eſt ut A B ad C D, ita E F ad G H; ut autem C D ad X, ita G H ad O; erit, ex æquali [e] ut A B ad X, ita E F ad O. Sed ut A B quidem ad X, ita eſt [f] rectilineum K A B ad L C D rectilineum; ut autem E F ad O, ita [f] rectilineum M F ad rectilineum N H. Ut igitur K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita eſt [g] rectilineum M F ad N H rectilineum. Et ſi ſit ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad rectilineum N H; dico ut A B ad C D, ita eſſe E F ad G H. Fiat enim ut A B ad C D, ita E F ad [h] P R, et [h] deſcribatur [c] ab ipſâ P R, alterutri rectilineorum M F, N H ſimile et ſimiliter poſitum, rectilineum S R. Quoniam igitur eſt ut A B ad C D, ita E F ad P R, et deſcripta ſunt ab ipſis quidem A B, C D ſimilia et ſimiliter poſita K A B, L C D rectilinea, ab ipſis vero E F, P R ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea M F, S R; erit [i] ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad R S rectilineum. Ponitur autem et ut rectilineum K A B ad rectilineum L C D, ita M F rectilineum ad rectilineum N H. Ergo ut rectilineum M F ad rectilineum N H, ita M F rectilineum ad rectilineum S R. Quod cum rectilineum M F ad utrumque ipſorum N H, S R eandem habeat proportionem, erit [k] rectilineum N H ipſi S R æquale. Eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum. Ergo G H eſt æqualis P R [l]. Et quoniam ut A B ad C D, ita eſt [l] E F ad P R; æqualis autem P R ipſi G H; erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; et rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt: et ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia et ſimiliter deſcripta,

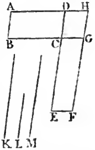



[c] 18. hujus.
[d] 11. hujus.
[e] 22. quinti.
[f] 2. Cor. 20. hujus.
[g] 11. quinti.
[h] 12. hujus.
[i] ex prius demonſtratis.
[k] 9. quinti.
[l] 3. Cor. [*] 20. hujus.

ſcripta, proportionalia fuerint; et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. *Q. E. D.*

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

*Æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.*




Sint æquiangula parallelogramma A C, C F æqualem habentia B C D angulum angulo E C G. Dico parallelogrammum A C ad parallelogrammum C F proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet B C ad C G, et ex proportione, quam D C habet ad C E. Ponatur enim, ut B C ſit in directum ipſi C G. Ergo et D C ipſi C E in directum [l]erit; et compleatur D G parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, et fiat ut B C ad C G, ita [m] K ad L; ut autem D C ad C E, ita L ad M. Proportiones igitur ipſius K ad L, et L ad M eædem ſunt, quæ proportiones laterum, videlicet B C ad C G, et D C ad C E. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, et proportione L ad M. Quare et K ad M proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt ut B C ad C G [n], ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; ſed ut B C ad C G, ita K ad L: erit [o] ut K ad L, ita parallelogrammum A C ad C H parallelogrammum. Rurſus quoniam eſt ut D C ad C E, ita C H parallelogrammum ad parallelogrammum C F; ut autem D C ad C E, ita L ad M; ergo ut L ad M, ita erit [o] parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum. Itaque cum oſtenſum ſit ut K quidem ad L, ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H: ut autem L ad M, ita parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum; erit [p], ex æquali, ut K ad M, ita A C parallelogrammum ad ipſum C F. Habet autem K ad M proportionem ex lateribus compoſitam. Ergo et A C parallelogrammum ad parallelogrammum C F proportionem habebit compoſitam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. *Q. E. D.*

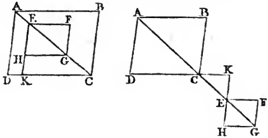
[l] 14. primi.
[m] 12. hujus.
[n] 1. hujus.
[o] 11. quinti.
[p] 22. quinti.

PROP.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Parallelogramma, quæ circa eandem ſunt diagonalem, et quorum latera duo adjacentia duobus adjacentibus ſunt parallela, inter ſe ſimilia ſunt.*

Parallelogrammi A B C D ſit A C diagonalis. Circa eandem A C ſit aliud parallelogrammum E F G H, cujus latera duo adjacentia E F, E H, duobus alterius adjacentibus, A B, A D ſint parallela; unde neceſſario conſequetur et reliqua duo adjacentia G F, G H reliquis duobus

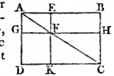



C B, C D adjacentibus eſſe parallela. Dico parallelogramma A B C D, E F G H eſſe inter ſe ſimilia. Conveniant enim E H, D C (ſi opus ſit productæ) in puncto K.
Propter rectas E H, A D parallelas[q], angulus G E H an- [q] ex hyp.
gulo C A D æqualis erit[r]. Pari ratione et propter rectas [r] 29. primi.
E F, A B parallelas, angulus G E F angulo C A B æqualis erit. Duo igitur G E H, G E F ſimul ſumpti duobus C A D, C A B ſimul ſumpti ſunt æquales. Hoc eſt, totus F E H toti B A D æqualis erit. Æquiangula igitur ſunt
parallelogramma A B C D, E F G H[s]. In triangulo au- [s] Cor. 34.
tem A D C, cum recta E K parallela ſit baſi A D, erit A D primi.
ad D C ut E K ad K C[t]. Pari ratione in triangulo E K C, [t] Cor. 2.
cum recta H G parallela ſit baſi, erit E K ad K C ut E H hujus.
ad H G. Quare A D ad D C ut E H ad H G[u]. In pa- [u] 11. quinti.
rallelogrammis igitur æquiangulis A B C D, E F G H, latera circa angulos æquales D, H ſunt proportionalia. Unde efficietur et reliqua latera circa angulos æquales B, F eſſe proportionalia. Nimirum propter æqualia la-
tera oppoſita utriuſque parallelogrammi[x], et eandem [x] 34. primi.

 æqualium

y 7. quinti. æqualium ad æqualia proportionem [y]. Parallelogramma
z Def. 1. hujus. igitur A B C D, E F G H inter se similia sunt [z]. *Q. E. D.*

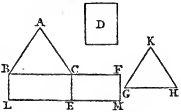
*Cor.* * Si per punctum quodvis F in A C, parallelogrammi A B C D diagonali, ducantur rectæ G F H, K F E lateribus parallelogrammi adjacentibus parallelæ, parallelogramma E F G A, H F K C circa diagonalem A C constituent toti et inter se similia.




[XXV.] PROP. XXV. PROBL.

*Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale, idem constituere.*

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere, A B C; cui autem æquale sit, D. Oportet ipsi A B C simile, et ipsi D æquale, idem constituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam B C rectilineo A B C æquale parallelogrammum B E.




a Cor. 45. primi.

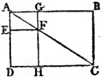
Ad rectam vero C E applicetur [a] parallelogrammum C M æquale ipsi D, in angulo F C E, qui C B L angulo est
b 14. primi. æqualis. In directum igitur [b] est B C ipsi C F, et L E
c 13. hujus. ipsi E M. Sumatur [c] inter B C, C F media proportio-
d 18. hujus. nalis G H; et [d] ab ipsâ G H describatur rectilineum K G H simile et similiter positum rectilineo A B C. Et quoniam est ut B C ad G H, ita G H ad C F, si autem tres
e 2. Cor. 20. hujus. rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam [e], ita est figura, quæ fit a primâ, ad eam quæ a secundâ, similem et similiter descriptam: erit ut B C ad C F, ita A B C rectilineum ad rectilineum K G H. Sed et ut B C
f 1. hujus. ad C F, ita [f] parallelogrammum B E ad E F parallelo-
g 11. quinti. grammum. Ut [g] igitur rectilineum A B C ad rectilineum K G H, ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum E F. Est autem rectilineum A B C æquale parallelogrammo B E. Æquale igitur est et K G H rectilineum
h 14. quinti. parallelogrammo E F [h]. Sed E F parallelogrammum æquale

æquale eſt rectilineo D. Ergo et rectilineum K G H ipſi D eſt æquale. Eſt autem G K H ſimile rectilineo A B C. Dato igitur rectilineo A B C ſimile, et alteri dato D æquale, idem conſtitutum eſt K G H. *Q. E. F.*

## PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

*Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulem habens, circa eandem diametrum eſt toti.*

A parallelogrammo enim A B C D parallelogrammum A F auferatur, ſimile ipſi A B C D, et ſimiliter poſitum, communemque ipſi angulum habens D A B. Dico parallelogrammum A B C D circa eandem eſſe diametrum parallelogrammo A F. Jungantur enim A F, C F, et G F producta ipſi D C in H occurrat.




Cum ſimilia ſint parallelogramma E G, D B et ſimiliter poſita, angulus A E F angulo A D C æqualis erit; et latera circa æquales angulos proportionalia. Quare A D eſt ad D C, ut A E ad E F. Sed æquales inter ſe ſunt E F, D H, nempe parallelogrammi E F H D latera oppoſita[l]. Erit igitur A E ad D H, ut A E ad E F[k]. Quare A D erit ad D C, ut A E ad D H. Hoc eſt, tota A D ad totam D C, ut pars A E ad partem D H. Quare et reliqua E D ad reliquam H C, ut A D ad D C[l]. Illi autem E D æqualis eſt H F, nempe eum oppoſita ſint parallelogrammi latera. Quare H F erit ad H C, ut E D ad H C[k], hoc eſt, ut A D ad D C. Sed A D ad D C, ut A E ad E F (id enim oſtenſum.) Quare H F ad H C, ut A E ad E F[m]. Sed propter rectas F H, D E parallelas, angulus F H C angulo A D C æqualis eſt[n]: cui æqualis jam initio oſtenſus eſt A E F. Anguli igitur F H C, A E F inter ſe æquales. Duo igitur triangula A E F, F H C angulos ad E et H æquales habent, et latera circa æquales illos angulos proportionalia. Æquiangula igitur erunt triangula illa, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur[o]. Angulus igitur A F E angulo F C H æqualis. Addatur utrique E F C. Duo igitur A F E, C F E ſimul ſumpti duobus F C H, C F E ſimul ſumptis ſunt æquales. Sed propter rectas C D, E F parallelas, duo F C H, C F E ſimul ſumpti duobus rectis ſunt æquales[n]. Duo igitur A F E, C F E ſimul ſumpti duobus

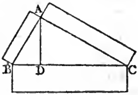
[l] 34. primi.
[k] 7. quinti.
[l] 19. quinti.
[m] 11. quinti.
[n] 29. primi.
[o] 6. hujus.

duobus rectis ſunt æquales. Directa igitur eſt linea
r 14. primi. A F C [r], et ipſa eſt parallelogrammi A B C D diagonalis. Parallelogrammum igitur A G F E, cum ſit circa lineam A F C, eſt circa diagonalem parallelogrammi A B C D. Si igitur &c. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXVII. THEOR.

*In rectangulis triangulis figura, quæ ſit a latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis.*

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C. Dico figuram, quæ ſit ex B C, æqualem eſſe eis, quæ ex B A, A C fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis A D. Quoniam igitur in triangulo rectangulo A C B ab angulo recto,



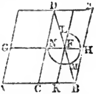

qui eſt ad A, ad B C baſim perpendicularis ducta eſt A D;
s 8. hujus. erunt [s] triangula A B D, A D C, quæ ſunt ad perpendicularem, ſimilia toti A B C, et inter ſe. Et quoniam ſi-
t 4. hujus. mile eſt A B C triangulum triangulo A B D, erit ut [t] C B ad B A, ita B A ad B D. Quod cum tres rectæ lineæ
u 2. Cor. 20. hujus. proportionales ſint, ut prima ad tertiam, ita erit [u] figura, quæ ſit ex primâ ad eam, quæ ex ſecundâ, ſimilem et ſimiliter deſcriptam. Ut igitur C B ad B D, ita figura, quæ ſit ex C B, ad eam, quæ ex B A, ſimilem et ſimiliter deſcriptam. Eâdem ratione, et ut B C ad C D, ita figura, quæ ſit ex B C, ad eam, quæ ex C A. Quare et
x 24. quinti. ut B C ad ipſas B D, D C, ita [x] figura, quæ ex B C, ad eas, quæ ex B A, A C, ſimiles et ſimiliter deſcriptas. Æqualis autem eſt B C ipſis B D, D C. Ergo figura, quæ ſit ex B C, æqualis eſt eis, quæ ex B A, A C fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ ſit a latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus et ſimiliter deſcriptis. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XXVIII. THEOR. [XXVII.]

*Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ei, quæ a dimidiâ deſcribitur, maximum eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.*

Sit recta linea A B; ſeceturque bifariam in C; et ad A B rectam lineam applicetur parallelogrammum A D deficiens figurâ parallelogrammâ C E, ſimili et ſimiliter poſitâ ei, quæ a dimidiâ ipſius A B deſcripta eſt. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ipſi C E, maximum eſſe A D.




Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figurâ parallelogrammâ H K ſimili et ſimiliter poſitâ ipſi C E. Dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus eſſe. Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [y] ſunt. Ducatur eorum diameter D B, et deſcribatur figura. Quoniam igitur C F [z] eſt æquale ipſi F E, commune apponatur H K. Totum igitur C H toti K E eſt æquale. Sed C H eſt [a] æquale C G, quoniam et recta linea A C ipſi C B. Ergo et G C ipſi E K æquale eſt. Commune apponatur C F. Totum igitur A F eſt æquale gnomoni L M N: quare et C E, hoc eſt, A D parallelogrammum parallelogrammo A F eſt majus. Omnium igitur parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus et ſimiliter poſitis ei, quæ a dimidiâ deſcribitur, maximum eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum. *Q. E. D.*

[y] 26. hujus.
[z] 43. primi.
[a] 36. primi.

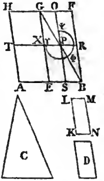
PROP.

[XXVIII.]

## PROP. XXIX. PROBL.

*Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, et eo, quod a dimidiâ, et eo, cui oportet simili deficere.*

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C, non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simili deficere, sit D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, et ab ipsâ E B describatur rectilineum




[b 18. hujus.] [b] simile et similiter positum ipsi D, quod sit E B F G; et compleatur A G parallelogrammum. Itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem; et si quidem A G sit æquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum A G applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ E F ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit H E majus quam C. Atqui E F æquale est H E. Ergo et E F quam C est majus. Quo autem E F superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile et similiter

[c 25. hujus.] positum, idem [c] constituatur K L M N. Sed D est simile E F. Quare et K M ipsi E F simile erit. Sit igitur recta linea K L homologa ipsi G E, L M vero ipsi G F. Et quoniam æquale est E F ipsis C et K M, erit E F ipso K M majus. Major igitur est recta linea G E ipsâ K L; et G F ipsa L M. Ponatur G X æqualis K L, et G O æqualis L M, et compleatur X G O P parallelogrammum. Æquale igitur est et simile X O ipsi K M. Sed K M simile

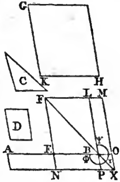
mile est E F. Ergo et [d] X O ipsi E F est simile. Circa eandem igitur est [e] diametrum X O ipsi E F. Sit ipsorum diameter G P B, et figura describatur. Itaque quoniam E F est æquale ipsis C et K M simul, quorum K M est æquale X O, erit reliquus Υ Φ Ψ gnomon æqualis reliquo C. Et quoniam O R est æquale X S, commune apponatur S R. Totum igitur O B toti X B est æquale. Sed X B est æquale T E, quoniam et latus A E lateri E B. Quare et T E ipsi O B æquale. Commune apponatur X S. Ergo totum T S est æquale toti gnomoni Υ Φ Ψ. Et Υ Φ Ψ gnomon ipsi C ostensus est æqualis; et T S igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum T S applicatum est, deficiens figurâ parallelogrammâ S R ipsi D simili, quoniam et S R simile est ipsi G B [f]. *Q. E. F.*

[d] 21. hujus.
[e] 26. hujus.
[f] 24. hujus.

## PROP. XXX. PROBL. [XXIX.]

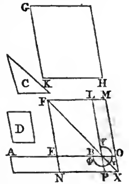
*Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ, quæ similis sit alteri datæ.*

Sit data recta linea A B, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam A B applicare, sit C; cui autem oportet simili excedere, D. Oportet ad rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili D. Secetur A B bifariam in E, atque ex E B ipsi D simile et similiter [g] positum parallelogrammum describatur E L. Et utrique quidem E L et C æquale, ipsi vero D simile et similiter positum, idem [h] constituatur G H. Simile igitur est G H ipsi E L. Sitque K H quidem latus homologum lateri F L, K G vero ipsi F E. Et quoniam parallelogrammum G H majus est ipso E L, erit recta linea K H major quam F L, et K G major quam F E. Producantur F L, F E, et ipsi quidem K H æqualis sit F L M, ipsi vero K G æqualis F E N, et compleatur M N parallelogrammum. Ergo M N æquale est et simile ipsi G H. Sed G H est simile E L: M N igitur ipsi E L simile




[g] 18. hujus.
[h] 25. hujus.

[h] 21. hujus. simile [e] erit; ac propterea circa eandem diametrum [f] est
[i] 26. hujus. E L ipsi M N. Ducatur ipsorum diameter F X, et figura describatur. Itaque quoniam G H ipsi E L et C est æquale, sed G H est æquale M N; erit et M N æquale ipsi E L et C. Commune auferatur E L. Reliquus igitur Φ Υ Ψ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam A E est æqualis E B,

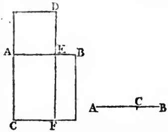



[g] 36. primi. æquale [g] erit et A N parallelogrammum parallelogrammo E P,
[h] 43. primi. hoc est, ipsi [h] L O. Commune apponatur E X. Totum igitur A X æquale est gnomoni Φ Υ Ψ. Sed Φ Υ Ψ gnomon est æqualis C. Ergo et A X ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est A X, excedens figurâ parallelogrammâ
[i] 24. hujus. P O, ipsi D simili, quoniam et ipsi E L simile est [i] O P. Q. E. F.

## [XXX.] PROP. XXXI. PROBL.

*Datam rectam lineam terminatam extremâ ac mediâ ratione secare.*

Sit data recta linea terminata A B. Oportet ipsam A B extremâ ac mediâ ratione secare. Descri-
[k] 46. primi. batur [k] ex A B quadratum B C; et ad A C ipsi B C æquale parallelo-
[l] 29. hujus. grammum [l] applicetur C D, excedens figurâ A D ipsi B C simili. Quadratum autem est B C, ergo et A D quadratum erit. Et quoniam B C




est æquale C D; commune auferatur C E. Reliquum igitur B F reliquo A D est æquale. Est autem et ipsi æquiangulum. Ergo ipsorum B F, A D latera, quæ cir-
[m] 14. hujus. cum æquales angulos, reciproce sunt [m] proportionalia. Ut igitur F E ad E D, ita est A E ad E B. Est autem
[n] 34. primi. F E æqualis [n] A C, hoc est, ipsi A B; et E D ipsi A E. Quare

Quare ut B A ad A E, ita A E ad E B. Sed A B major eſt quam A E. Ergo A E quam E B eſt [o] major. Recta igitur linea A B extremâ ac mediâ ratione ſecta eſt in E. Et majus ipſius ſegmentum eſt A E. *Q. E. F.* [o] 14. quinti.

Aliter. Sit data recta linea A B. Oportet ipſam A B extremâ ac mediâ ratione ſecare. Secetur enim A B in C, ita ut rectangulum [p], quod continetur ſub A B, B C, æquale ſit quadrato ex A C. Quoniam igitur rectangulum ſub A B, B C æquale [q] eſt quadrato ex A C, erit ut B A ad A C ita A C ad C B. Ergo A B recta linea extremâ ac mediâ ratione ſecta eſt. *Q. E. F.* [p] 11. ſecundi. [q] 17. hujus.

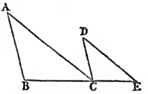
SCHOLION.*

Turbatam Theoni Propoſitionum ſeriem reſtituimus. Nempe quæ viceſimam ſextam proxime ſequuntur quatuor, triceſimæ primæ, quæ Theoni numerata eſt, demonſtrandæ nihil prorſus inſerviunt. In 29ª vero et triceſimâ fieri Euclides jubet, quod quâ ratione efficiendum ſit, ex triceſimâ primâ demum intelligitur. Nos igitur, quæ Theoni eſt triceſima prima, viceſimæ ſeptimæ loco repoſuimus. Dein Theoni 27ª, 28ª, 29ª, 30ª, noſtræ ſunt 28ª, 29ª, 30ª, 31ª. Ita enim ab Euclide propoſitiones ordinatas fuiſſe exiſtimamus.

## PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

*Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt.*

Sint duo triangula A B C, D C E, quæ duo latera B A, A C duobus lateribus C D, D E proportionalia habeant, ſcil. ſit ſicut B A ad A C, ita C D ad D E; parallela autem ſit A B ipſi D C, et A C ipſi D E. Dico B C ipſi C E in directum eſſe. Quoniam enim A B parallela eſt D C,




et in ipſas incidit recta linea A C; erunt [r] anguli alterni B A C, A C D æquales inter ſe. Eâdem ratione, et angulus C D E æqualis eſt angulo A C D. Quare et B A C ipſi [r] 29. primi.

ipsi C D E est æqualis. Et quoniam duo triangula sunt A B C, D C E, unum angulum ad A uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut B A ad A C, ita C D ad D E; erit [s] triangulum A B C triangulo D C E æquiangulum. Ergo A B C angulus est æqualis angulo D C E. Ostensus autem est et angulus A C D æqualis angulo B A C. Totus igitur A C E duobus A B C, B A C est æqualis. Communis apponatur A C B. Ergo anguli A C E, A C B angulis B A C, A C B, C B A æquales sunt. Sed B A C, A C B, C B A anguli duobus rectis sunt æquales. Et anguli igitur A C E, A C B duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam A C, et ad punctum in ipsâ C, duæ rectæ lineæ B C, C E non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, A C E, A C B duobus rectis æquales efficiunt. Ergo B C ipsi C E in directum [t] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. *Q. E. D.*

[s] 6. hujus.

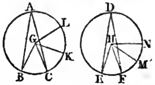
[t] 14. primi.

[XXXIII.]

## PROP. XXXIII. THEOR.

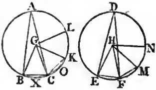
*In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem et sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.*

Sint æquales circuli A B C, D E F; et ad centra quidem ipsorum G, H sint anguli B G C, E H F, ad circumferentias vero anguli B A C, E D F. Dico ut circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita esse, et B G C angulum ad angulum E H F, et angulum B A C ad angulum E D F; et adhuc sectorem B G C ad E H F sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem B C æquales quotcunque deinceps C K, K L; circumferentiæ vero E F, rursus æquales quotcunque F M, M N. Et jungantur G K, G L, H M, H N. Quoniam igitur circumferentiæ B C, C K, K L inter se sunt æquales, et anguli B G C, C G K, K G L inter se æquales [u] erunt. Quotuplex igitur est circumferentia




[u] 27. tertii.

ferentia B L circumferentiæ B C, totuplex eſt et B G L angulus anguli B G C. Eâdem ratione et quotuplex eſt circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex et E H N angulus anguli E H F. Si vero æqualis eſt B L circumferentia circumferentiæ E N, et angulus B G L angulo E H N erit æqualis; et ſi circumferentia B L major eſt circumferentiâ E N, major erit et B G L angulus angulo E H N; et ſi minor, minor. Quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis B C, E F, et duobus angulis B G C, E H F; ſumpta ſunt circumferentiæ quidem B C, et B G C anguli, æquimultiplicia; videlicet circumferentia B L et B G L angulus: circumferentiæ vero E F, et E H F anguli, æquimultiplicia; nempe circumferentia E N et angulus E H N. Atque oſtenſum eſt ſi circumferentia B L ſuperat circumferentiam E N, et B G L angulum ſuperare angulum E H N; et ſi æqualis, æqualem; et ſi minor, minorem eſſe. Ut [u] igitur circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita angulus B G C ad angulum E H F. Sed ut B G C angulus ad angulum E H F, ita [x] angulus B A C ad E D F angulum. Uterque enim utriuſque eſt duplex [y]. Ut igitur B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita et angulus B G C ad angulum E H F, et angulus B A C ad E D F angulum. Quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant. Dico inſuper et ut B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita eſſe ſectorem G B C ad H F E ſectorem. Jungantur enim B C, C K; et ſumptis in circumferentiis B C, C K punctis X, O, jungantur et B X, X C, C O, O K. Itaque quoniam duæ B G, G C duabus C G, G K æquales ſunt, et angulos æquales continent; erit et baſis B C baſi C K æqualis. Æquale [z] igitur eſt G B C triangulum triangulo G C K. Et quoniam circumferentia B C circumferentiæ C K eſt æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum A B C, æqualis eſt reliquæ, quæ eundem circulum complet. Quare et angulus B X C angulo C O K eſt æqualis [a]. Simile igitur eſt B X C

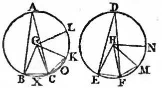



[u] Def. 5. quinti.
[x] 15. quinti.
[y] 20. tertii.
[z] 4. primi.
[a] 27. tertii.

[a] Def. 11. tertii. segmentum[a] segmento C O K; et sunt in æqualibus rectis lineis B C, C K. Quæ autem in æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, et inter se[b] æqualia sunt. Ergo segmentum B X C est æquale segmento C O K. Est autem et B G C triangulum triangulo C G K æquale. Et totus igitur sector B G C sectori C G K æqualis erit. Eâdem ratione et G K L sector utrique ipsorum G B C, G C K est æqualis. Sectores igitur B G C, C G K, K G L, quotquot fuerint, æquales sunt inter se. Similiter et sectores H E F, H F M, H M N inter se sunt æquales. Quotuplex igitur est L B circumferentia circumferentiæ B C, totuplex est et G B L sector sectoris G B C. Eâdem ratione et quotuplex est circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex est et H E N sector sectoris H E F. Sed si circumferentia B L circumferentiæ E N est æqualis, et sector B G L æqualis est sectorl E H N; et si circumferentia B L superat circumferentiam E N, superat et B G L sector sectorem E H N; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem B C, E F circumferentiis, duobus vero sectoribus G B C, E H F; sumpta sunt æquimultiplicia circumferentiæ quidem B C, et G B C sectoris, circumferentia B L et G B L sector; circumferentiæ vero E F, et sectoris H E F, æquimultiplicia, circumferentia E N et H E N sector: atque ostensum est si B L circumferentia superat circumferentiam E N, et sectorem B G L superare sectorem E H N; et si æqualis, æqualem esse; et si minor, minorem. Est igitur ut B C circumferentia[c] ad circumferentiam E F, ita sector G B C ad H E F sectorem. *Q. E. D.*

[b] 24. tertii.

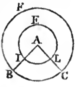
[c] Def. 5. quinti.




*Cor.* 1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus, cui insistit, ad totam circumferentiam: nam ut angulus B A C ad rectum, ita B C arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus B A C ad quatuor rectos, ut arcus B C ad totam circumferentiam.

*Cor.* 2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C qui æquales

æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra, ſive ad peripherias, ſunt ſimiles. Nam eſt I L ad totam peripheriam I L E, ut angulus I A L ad quatuor rectos: eſt vero ut I A L ſeu B A C ad quatuor rectos, ita arcus B C ad totam peripheriam B C F. Quare ut I L ad totam peripheriam I L E, ita B C ad totam peripheriam B C F. Ac proinde arcus I L, B C ſunt ſimiles.




*Cor.* 3. Duæ ſemidiametri A B, A C a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles I L, B C.

# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

## LIBER SEPTIMUS.

### DEFINITIONES.

Definitio I.

UNITAS eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt unum dicitur.

II.

Numerus autem, ex unitatibus conſtans multitudo.

III.

Pars eſt numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

IV.

Partes autem, quando non metitur.

V.

Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

VI.

Par numerus eſt, qui bifariam dividitur.

VII.

Impar vero, qui bifariam non dividitur; vel qui a pari numero unitate differt.

VIII.

Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

 IX.

IX.

Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

X.

Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

XI.

Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

XII.

Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas communis menſura metitur.

XIII.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

XIV.

Compoſiti inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.

XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates ſunt in ipſo, toties componitur multiplicatus, et aliquis gignitur.

XVI.

Quando duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus eſt, planus appellatur; latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, factus ſolidus appellatur: latera vero ipſius, numeri ſeſe multiplicantes.

XVIII.

Quadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis; vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales ſunt, quando primus ſecundi et tertius quarti æquimultiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes.

XXI.

XXI.

Similes plani et ſolidi numeri ſunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

## PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

*Si duobus numeris inæqualibus expoſitis detracto ſemper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas; numeri a principio poſiti primi inter ſe erunt.*

Duobus enim inæqualibus numeris A B, C D detracto ſemper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad reliqua fuerit unitas: dico numeros A B, C D inter ſe primos eſſe; hoc eſt, ipſos A B, C D unitatem ſolam metiri.

A . H . . F . . . . . . . . . . B

C . . G . . . D

E - - - -

Si enim A B, C D non ſint primi inter ſe, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, ſitque E; et C D quidem ipſum A B metiens relinquat ſeipſo minorem F A; A F vero metiens D C relinquat ſeipſo minorem G C; et G C metiens F A unitatem H A relinquat.

Quoniam igitur numerus E ipſum C D metitur, C D vero metitur B F; et E ipſum B F metitur. Metitur autem et totum B A; ergo et reliquum A F metietur. Sed A F metitur D G: quare et E ipſum D G metietur. Metitur autem et totum D C: ergo et reliquum C G metietur. At C G metitur F H; et igitur E ipſum F H metietur. Sed et metitur totum F A; et igitur numerus E metietur reliquam A H unitatem, quod [a] fieri non poteſt: non igitur ipſos A B, C D metietur aliquis numerus. Ergo A B, C D primi inter ſe ſunt. *Q. E. D.*

[a] Def. 3. hujus.

## PROP. II. PROBL. [II.]

*Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.*

Sint dati duo numeri non primi inter ſe A B, C D, quorum minor ſit C D: oportet ipſorum A B, C D maximam communem menſuram invenire.

Si igitur C D metitur A B, cum etiam ſeipſum metiatur; erit C D ipſorum C D, A B communis menſura. Et perſpicuum eſt eam maximam eſſe; nullus enim major quam C D ipſum C D metietur.

A . . . . . . . . B
C . . . . D

Si vero C D non metitur A B; ipſorum A B, C D detracto ſemper minore de majore, unitas nunquam relinquetur. Nam ſi tandem relinquatur, erunt A B, C D primi inter ſe: quod hypotheſi contrarium eſt. Relinquetur igitur numerus quidam, qui metietur præcedentem. Et C D quidem ipſum A B metiens relinquat ſeipſo minorem A E; A E vero metiens C D relinquat ſeipſo minorem C F; C F vero ipſum A E metiatur. Itaque quoniam C F ipſum A E metitur, A E vero ipſum D F; et C F ipſum D F metietur. Sed et metitur ſeipſum; et totum igitur C D metietur. At C D ipſum B E metitur: ergo et C F metitur B E. Metitur autem et E A; et totum igitur B A metietur. Sed et metitur C D: ergo C F ipſos A B, C D metitur; ac propterea C F ipſorum A B, C D eſt communis menſura. Dico etiam maximam eſſe. Si enim C F non eſt maxima communis menſura ipſorum A B, C D; ipſos A B, C D metietur aliquis numerus major ipſo C F. Metiatur, ſitque G. Et quoniam G ipſum C D metitur; C D vero ipſum B E; et G ipſum B E metitur. Metitur autem et totum B A; et reliquum igitur A E metietur. Sed A E metitur D F: ergo et G ipſum D F metietur. Metitur autem et totum D C: quare et reliquum C F metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos A B, C D numeros metietur numerus aliquis major ipſo C F. Ergo C F eſt ipſorum A B, C D maxima communis menſura. *Q. E. D.*

A . . . . E . . . . . . B
C . . F . . . . D
G - - - -

*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem menſuram metiri.

PROP.

## PROP. III. PROBL. [III.]

*Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram invenire.*

Sint dati tres numeri non primi inter se A, B, C: oportet ipsorum A, B, C maximam communem mensuram invenire.

Sumatur duorum A, B maxima communis mensura D[b]: itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. Metiatur primùm; metitur autem et ipsos A, B: ergo D numeros A, B, C metitur; et ob id ipsorum est communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim D non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura; metietur eos aliquis numerus major ipso D. Metiatur, et sit E. Quoniam igitur E metitur numeros A, B, C, et ipsos A, B metietur, et[c] ipsorum A, B maximam communem mensuram. Sed ipsorum A, B maxima communis mensura est D: ergo E ipsum D metitur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso D metietur: ergo D ipsorum A, B, C maxima est communis mensura.

A . . . . . . . .
B . . . . . .
C . . . .
D . .
E ----

[b] 2. hujus.

[c] Cor. 2. hujus.

Non metiatur autem D ipsum C. Dico primum numeros D, C non esse primos inter se. Quoniam enim A, B, C non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus; et qui metitur ipsos A, B, C, et ipsos A, B metietur, et[c] ipsorum A, B maximam communem mensuram, videlicet D, metietur. Metitur autem et ipsum C: ergo ipsos D, C numerus aliquis metietur; ideoque D, C non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E[b]. Et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos A, B, et E ipsos A, B metietur. Metitur autem et C; ergo et ipsos A, B, C metietur: eritque E ipsorum A, B, C communis mensura. Dico et maximam esse. Si enim E non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura, metietur A, B, C numeros numerus aliquis major ipso E. Metiatur, sitque F. Et quoniam F metitur numeros A, B, C;

A . . . . . . . . . . . . . . . . . .
B . . . . . . . . . . . .
C . . . .
D . . . . . .
E . .
F ---

A, B, C; et ipſos A, B, et ipſorum A, B maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt D: ergo F ipſum D metitur. Metitur autem et ipſum C: quare F et ipſos D, C; et igitur ipſorum D, C maximam communem menſuram metietur. Sed ipſorum C, D maxima communis menſura eſt E: ergo F ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, C numeros numerus aliquis major ipſo E metietur. Ergo E ipſorum A, B, C maxima eſt communis menſura.

A . . . . . . . . . . . . . . . . .
B . . . . . . . . . . . .
C . . . .
D . . . . . .
E . .
F ---

Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inventa eſt. *Q. E. F.*

*Cor.* Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, et ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem menſuram inveniemus.

## [IV.] PROP. IV. THEOR.

*Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes.*

Sint duo numeri A, B C, quorum B C ſit minor: dico B C ipſius A vel partem eſſe, vel partes.

Numeri enim A, B C vel primi ſunt inter ſe, vel non. Sint prius inter ſe primi; et diviſo B C in unitates, quæ in ipſo ſunt, erit[c] unaquæque unitas, earum quæ in B C, pars aliqua ipſius A: ergo B C ipſius A partes eſt.

[c] Def. 1. & 2. hujus.

A . . . . . . . .
B . . . . . C

Sed non ſint A, B C inter ſe primi: itaque B C vel ipſum A metitur, vel non. Et ſiquidem metitur, erit B C pars ipſius A.

A . . . . . . . .
B . . . . C

Si vero non; ſumatur[d] ipſorum A, B C maxima communis menſura D; et dividatur B C in numeros ipſi D æquales B E, E F, F C. Quoniam igitur D numerum A metitur, erit D pars ipſius A. Æqualis autem eſt D unicuique ipſorum B E, E F, F C: ergo et unuſquiſque ipſorum B E, E F, F C pars eſt ipſius A: ac propterea B C ipſius A partes eſt.

[d] 2. hujus.

A . . . . . . . .
B . . E . . F . . C
D . .

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes. *Q. E. D.*

## PROP. V. THEOR. [V.]

*Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et uterque utriuſque eadem pars erit, quæ unus unius.*

Numerus A numeri B C pars ſit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ eſt A ipſius B C: dico et utrumque A, D utriuſque B C, E F eandem partem eſſe, quæ eſt A ipſius B C.

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot erunt et in E F numeri æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, hoc eſt, E H, H F; erit utique æqualis multitudo numerorum B G, G C multitudini ipſorum E H, H F. Et quoniam æqualis eſt B G ipſi A, et E H ipſi D; erunt B G, E H ipſis A, D, æquales. Et eâdem ratione, cum G C ſit æqualis ipſi A, et H F ipſi D; erunt G C, H F ipſis A, D æquales: quot igitur numeri ſunt in B C, æquales ipſi A, tot ſunt et in B C, E F æquales ipſis A, D. Ergo quotuplex eſt B C ipſius A, totuplex erit et uterque B C, E F utriuſque A, D. Quæ igitur pars eſt A ipſius B C, eadem pars erit et uterque A, D utriuſque B C, E F. *Q. E. D.*

A . . .
B . . . G . . . C
D . . . .
E . . . . H . . . . F

## PROP. VI. THEOR. [VI.]

*Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et uterque utriuſque eædem partes erit, quæ unus unius.*

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes, quæ A B ipſius C: dico et utrumque A B, D E utriuſque C, F eaſdem partes eſſe, quæ A B ipſius C.

A . . . G . . . B
C . . . . . . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . . . . . . . . . .

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem eſt D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes

partes ipſius F. Dividatur A B quidem in partes ipſius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipſius F, hoc eſt D H, H E.

Erit ipſorum A G, G B multitudo æqualis multitudini ipſorum D H, H E. Et quoniam quæ pars eſt A G ipſius C, eadem eſt pars et D H ipſius F; quæ pars eſt A G ipſius C, eadem pars erit[e] et uterque A G, D H utriuſque C, F. Simili ratione et quæ pars eſt G B ipſius C, eadem pars erit et uterque G B, H E utriuſque C, F. Quæ igitur partes eſt A B ipſius C, eædem partes eſt et uterque A B, D E utriuſque C, F. *Q. E. D.*

A . . . G . . . B
C . . . . . . . . .
D . . . . H . . . . E
F . . . . . . . . . . . .

[e] 5. hujus.

[VII.] PROP. VII. THEOR.

*Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.*

Numerus enim A B numeri C D pars ſit, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D eandem partem eſſe, quæ eſt totus A B totius C D.

Quæ enim pars eſt A E ipſius C F, eadem pars ſit et E B ipſius C G. Et quoniam quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem pars eſt et E B ipſius C G; quæ A E ipſius C F, eadem pars eſt[f] et A B ipſius G F. Quæ autem pars eſt A E ipſius C F, eadem pars ponitur et A B ipſius C D: quæ igitur pars eſt A B ipſius G F, eadem eſt et A B ipſius C D: quare A B utriuſque G F, C D eadem eſt pars: æqualis igitur eſt G F ipſi C D. Communis auferatur C F: ergo reliquus G C reliquo F D eſt æqualis. Et quoniam quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem eſt et E B ipſius G C; æqualis autem eſt G C ipſi F D; quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem erit et E B ipſius F D. Sed quæ pars eſt A E ipſius C F, eadem eſt[g] et A B ipſius C D; ergo quæ pars eſt E B ipſius F D, eadem eſt et A B ipſius C D. Et reliquus igitur E B reliqui F D eadem pars erit, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . . . . . F . . . . D

[f] 5. hujus.

[g] ex hyp.

PROP.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; et reliquus erit reliqui eædem partes, quæ totus totius.*

Numerus enim A B numeri C D sit partes, quæ ablatus A E ablati C F: dico et reliquum E B reliqui F D easdem partes esse, quæ totus A B totius C D.

Ponatur enim ipsi A B æqualis G H: quæ igitur partes est G H ipsius C D, eædem est et A E ipsius C F. Dividatur G H quidem in partes ipsius C D, videlicet G K, K H; A E vero dividatur in partes ipsius C F, videlicet

A . . . . . . L . . . . . . E . . . . B
C . . . . . . . . . . . . . . . . . . F . . . . . . D
G . . . . . . M . . K . . . . . . N . . H

A L, L E: erit igitur ipsarum G K, K H multitudo æqualis multitudini ipsarum A L, L E. Et quoniam quæ pars est G K ipsius C D, eadem est et A L ipsius C F, major autem C D quam C F; et G K quam A L est major. Ponatur ipsi A L æqualis G M: quæ igitur pars est G K ipsius C D, eadem est et G M ipsius C F: quare [h] et reliquus M K reliqui F D eadem pars est, quæ totus G K totius C D. Rursus quoniam quæ pars est K H ipsius C D, eadem est et L E ipsius C F; major autem C D quam C F: erit et K H quam L E major. Ponatur ipsi L E æqualis K N: quæ igitur pars est K H ipsius C D, eadem est et K N ipsius C F: ergo et reliquus N H reliqui F D eadem pars est, quæ totus K H totius C D. Ostensum autem est et reliquum M K reliqui F D eandem partem esse, quæ totus G K totius D C; et uterque igitur simul M K, N H ipsius D F eædem partes est, quæ totus H G totius D C [i]. Æqualis autem est uterque simul M K, N H ipsi E B; nimirum cum H G ipsi B A æqualis sit, et G M, K N simul sumpti simul sumptis A L, L E. Et reliquus igitur E B reliqui F D eædem partes est, quæ totus A B totius C D. *Q. E. D.*

h 7. hujus.

i 6. hujus.

## PROP. IX. THEOR. [IX.]

*Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et permutando quæ pars est, vel partes, primus tertii, eadem erit pars, vel eædem partes, et secundus quarti.*

Numerus enim A numeri B C pars sit, et alter D alterius E F eadem pars, quæ A ipsius B C; minor autem sit A quam D: dico et permutando quæ pars est A ipsius D, vel partes, eandem partem esse et B C ipsius E F, vel easdem partes.

Quoniam

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius B C, eadem eſt et D ipſius E F; quot numeri ſunt in B C æquales ipſi A, tot ſunt et in E F æquales ipſi D. Dividatur B C quidem in numeros ipſi A æquales, videlicet in B G, G C; E F vero dividatur in numeros ipſi D æquales, E H, H F: erit ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F.

A . . . .
B . . . . G . . . . C
D . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

Et quoniam numeri B G, G C inter ſe ſunt æquales, ſunt autem et æquales E H, H F; atque eſt ipſorum B G, G C multitudo æqualis multitudini ipſorum E H, H F: quæ pars eſt B G ipſius E H, vel partes, eadem pars erit et G C ipſius H F, vel eædem partes. Ergo[l] quæ pars eſt B G ipſius E H vel partes, eadem pars erit et uterque B C utriuſque E F vel eædem partes. Æqualis autem eſt B G ipſi A, et E H ipſi D. Quæ igitur pars eſt A ipſius D vel partes, eadem pars erit et B C ipſius E F vel eædem partes. *Q. E. D.*

[l] 5. & 6. hujus.

[X.] PROP. X. PROBL.

*Si numerus numeri partes fuerit, et alter alterius eædem partes; et permutando quæ partes eſt primus tertii, vel pars, eædem partes erit et ſecundus quarti, vel eadem pars.*

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter D E alterius F eædem partes; ſit autem A B minor quam D E: dico et permutando quæ partes eſt A B ipſius D E vel pars, eaſdem partes eſſe et C ipſius F vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes eſt A B ipſius C, eædem partes eſt et D E ipſius F; quot ſunt in A B partes ipſius C, tot erunt et in D E partes ipſius F. Dividatur A B quidem in partes ipſius C, videlicet A G, G B; D E vero dividatur in partes ipſius F, hoc eſt, D H, H E: erit utique ipſarum A G, G B multitudo multitudini ipſarum D H, H E æqualis. Et quoniam quæ pars eſt A G ipſius C, eadem pars eſt et D H ipſius F, et permutando[k] quæ pars eſt A G ipſius D H vel partes, eadem pars erit et C ipſius F vel eædem partes. Simili ratione et quæ pars eſt G B ipſius H E vel

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . . . . . . . . . . . .

[k] 9. hujus.

vel partes, eadem pars erit et C ipsius F vel eædem partes: ergo[l] quæ pars est A G ipsius D H vel partes, eadem pars erit et A B ipsius D E vel eædem partes. Sed quæ pars est A G ipsius D H vel partes, eadem pars est et C ipsius F vel eædem partes. Et igitur quæ partes est A B ipsius D E vel pars, eædem partes est et C ipsius F vel eadem pars. *Q. E. D.*

[l] 5. & 6. hujus.

## PROP. XI. THEOR. [XI.]

*Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.*

Sit ut totus A B ad totum C D ita ablatus A E ad ablatum C F: dico et reliquum E B ad reliquum F D ita esse ut totus A B ad totum C D.

Quoniam enim est ut A B ad C D ita A E ad C F[m]: quæ pars est A B ipsius C D vel partes, eadem pars erit et A E ipsius C F vel eædem partes: ergo[n] et reliquus E B reliqui F D eadem pars erit vel eædem partes, quæ A B ipsius C D. Est igitur[m] ut E B ad F D ita A B ad C D. *Q. E. D.*

A . . . . E . . B

C . . . . . . F . . . D

[m] Def. 20. hujus.

[n] 7. & 8. hujus.

## PROP. XII. THEOR. [XII.]

*Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.*

Sint quotcunque numeri proportionales, A, B, C, D; sitque ut A ad B ita C ad D: dico ut A ad B ita esse A, C ad B, D.

Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D[o]; quæ pars est A ipsius B vel partes, eadem pars erit et C ipsius D vel partes; et igitur[p] uterque A, C utriusque B, D eadem pars est vel partes, quæ A ipsius B. Ergo[o] ut A ad B ita est A, C ad B, D. *Q. E. D.*

A . .     C . . . .

B . . .     D . . . . . .

[o] Def. 20. hujus.

[p] 5. & 6. hujus.

## PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

*Si quatuor numeri proportionales fuerint; et permutando proportionales erunt.*

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, sitque ut A ad B ita C ad D: dico et permutando proportionales esse, videlicet ut A ad C ita esse B ad D.

Quoniam

Quoniam enim eſt ut A ad B ita C ad D, quæ pars eſt
q Def. 20. hujus. A ipſius B vel partes[q], eadem pars erit et C ipſius D vel eædem partes: permutando igitur[r] quæ pars eſt A ipſius C

A . .  C . . . . . .
B . . .  D . . . . . . . . .

r 9. & 10. hujus. vel partes, eadem pars eſt et B ipſius D vel partes. Ergo[s] ut A ad C ita eſt B ad D. *Q. E. D.*

## [XIV.] PROP. XIV. THEOR.

*Si fuerint quotcunque numeri, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione; etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.*

Sint enim quotcunque numeri A, B, C, et alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur et in eâdem ratione, ſc. D, E, F; ſitque ut A ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico etiam ex æquo ut A ad C, ita eſſe D ad F.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita D ad E; erit per-
s 13. hujus. mutando[s] ut A ad D ita B ad E. Rurſus, quoniam eſt ut B ad C ita E ad F; permutando ut B ad E ita erit C ad F, ut

A . . . . . . . . .  D . . . . . .
B . . . . . .  E . . . .
C . . . .  F . .

autem B ad E ita eſt A ad D; et igitur ut A ad D ita C ad F. Ergo permutando ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

## [XV.] PROP. XV. THEOR.

*Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque ſecundus quartum.*

Unitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF: dico et permutando unitatem A æqualiter metiri numerum D, atque BC ipſum EF.

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipſum EF; quot unitates ſunt in BC, tot ſunt et in EF numeri æquales ipſi D.

A .  D . .
B . G . H . C  E . . K . . L . . F

Dividatur BC quidem in unitates, quæ in ipſo ſunt, videlicet BG, GH, HC; EF vero dividatur in numeros ipſi D æquales, EK, KL, LF. Erit igitur ipſorum

ipsorum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini ipsorum E K, K L, L F. Et quoniam B G, G H, H C unitates inter se æquales sunt, suntque numeri E K, K L, L F inter se æquales; et unitatum B G, G H, H C multitudo æqualis multitudini numerorum E K, K L, L F: erit ut B G unitas ad numerum E K, ita G H unitas ad numerum K L, et unitas H C ad L F numerum. Et [t] ut [t] 12. hujus. unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut unitas B G ad numerum E K ita B C ad E F. Æqualis autem est B G unitas unitati A, et E K numerus numero D: quare ut unitas A ad numerum D, ita est B C ad E F. Igitur [u] unitas A numerum D æqualiter metitur, atque [u] Def. 20. hujus. B C ipsum E F. *Q. E. D.*

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis inter se æquales erunt.*

Sint duo numeri A, B; et A quidem ipsum B multiplicans faciat C; B vero multiplicans A faciat D: dico C ipsi D æqualem esse.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C; [x] metietur B ipsum C per unitates, [x] Def. 15. hujus. quæ sunt in A. Metitur autem et E unitas numerum A per unitates, quæ in ipso sunt: igitur E unitas numerum A

E .
A . .    B . . .
C . . . . . .    D . . . . . .

æqualiter metitur, atque B ipsum C: quare permutando [y] [y] 15. hujus. unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipsum C. Rursus, quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per unitates, quæ sunt in B. Metitur autem et E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. Sed E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum C: igitur A utrumque ipsorum C, D æqualiter metitur. Erit ergo C ipsi D æqualis. *Q. E. D.*

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.*

Numerus enim A duos numeros B, C multiplicans faciat ipsos D, E: dico ut B ad C ita esse D ad E.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D; me-

[e Def. 15. hujus.] tietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A[e]. Metitur autem et F unitas numerum A per unitates, quæ in ipso sunt: igitur F unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum D. Ergo[a] ut F unitas ad numerum A, ita est B ad D. Eâdem ratione ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. Quare ut B ad D, ita C ad E; et permutando[b] ut B ad C, ita D ad E. *Q. E. D.*

[a Def. 20. hujus.]
[b 13. hujus.]

F .
A . .
B . . .   C . . . .
D . . . . . .   E . . . . . . . .

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

*Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.*

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos D, E: dico ut A ad B ita esse D ad E.

Quoniam enim A ipsum C multiplicans fecit D, et C [c 16. hujus.] multiplicans A[c] ipsum D fecit. Eâdem ratione et C ipsum B multiplicans fecit E: numerus igitur C duos numeros A, B [d 17. hujus.] multiplicans ipsos D, E fecit. Est igitur[d] ut A ad B ita D ad E. *Q. E. D.*

A . . .   B . . . .
C . .
D . . . . . .   E . . . . . . . .

[XIX.] PROP. XIX. THEOR.

*Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo et quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo et tertio: et si numerus, qui fit ex primo et quarto, æqualis fuerit ei, qui ex secundo et tertio; quatuor numeri proportionales erunt.*

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D; sitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem ipsum D multiplicans faciat E; B vero multiplicans ipsum C faciat F: dico E esse æqualem ipsi F.

A enim multiplicans C faciat G. Quoniam igitur A ipsum quidem C multiplicans fecit G, ipsum vero D multiplicans fecit E; numerus A duos numeros D, C [e 17. hujus.] multiplicans fecit ipsos G, E: est igitur[e] ut C ad D, ita G ad E. Ut autem C ad D, ita A ad B: quare ut A ad B, ita G ad E. Rursus, quoniam A ipsum C multiplicans

plicans fecit G; et B ipsum C multiplicans fecit F: duo numeri A, B numerum quendam C multiplicantes fecerunt ipsos G, F; igitur [f] ut A ad B, ita est G ad F. Sed ut A ad B, ita G ad E: ergo ut G ad E, ita est G ad F: igitur G ad utrumque ipsorum E, F eandem rationem habet. Erit igitur E ipsi F æqualis. [f] 18. hujus.

A . . . . . .
B . . . .
C . . .
D . .
E . . . . . . . . . . . .
F . . . . . . . . . . . .
G . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Sed sit E æqualis ipsi F: dico ut A ad B ita esse C ad D.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos C, D multiplicans fecit G, E; erit ut C ad D, ita G ad E. Est autem E ipsi F æqualis: ut igitur G ad E, ita G ad F. Sed ut G ad E, ita C ad D: ergo ut C ad D, ita G ad F. Ut autem G ad F, ita [f] A ad B. Quare ut A ad B, ita C ad D. *Q. E. D.*

*Cor.* 1. * Si primus sit ad secundum ut tertius ad quartum; factum ex secundo et tertio primus quarto, et quartus primo metietur.

*Cor.* 2. * Propositis tribus numeris, si factum ex secundo et tertio primus non metiatur, non datur tribus propositis proportione quartus.

## PROP. XX. THEOR. [XX.]

*Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit a medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui a medio, tres numeri proportionales erunt.*

Sint tres numeri proportionales A, B, C; sitque ut A ad B ita B ad C: dico numerum qui fit ex A, C æqualem esse ei, qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis D; est igitur ut A ad B ita D ad C: ergo [g] qui fit ex A, C æqualis est ei, qui ex B, D. Qui autem fit ex B, D est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi D. Qui igitur fit ex A, C ipsi, qui fit ex B, est æqualis. [g] 19. hujus.

A . . . . . . . . .
B . . . . . .
D . . . . . .
C . . . .

Sed qui fit ex A, C æqualis sit ei, qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad C.

 Quoniam

Quoniam enim qui ex A, C fit æqualis eft ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B eft æqualis ei, qui ex B, D: [h] 19. hujus. crit [h] ut A ad B ita D ad C. Sed B ipfi D eft æqualis. Ut igitur A ad B ita eft B ad C. *Q. E. D.*

*Cor.* 1.* Si primus fit ad fecundum ut fecundus ad tertium, quadratum ex fecundo primus metietur tertio, et tertius primo.

*Cor.* 2.* Duobus propofitis, fi quadratum fecundi primus non metiatur, non datur duobus propofitis proportione tertius.

SCHOLION.*

Si numerus numeros multiplicaverit, et compofitum ex omnibus idem multiplicaverit; factus multiplicatione compofiti compofito ex factis omnibus prioribus æqualis erit.

Numeros B C, C D, D E numerus A multiplicans faciat F G, G H, H I.

Idem autem A numerum B E, ex B C, C D, D E compofitum, multiplicans faciat numerum K.

A . .
B . . C . . . D . . . . E
F . . . . G . . . . . . H . . . . . . . . I
K . . . . . . . . . . . . . . . . .

Dico numerum K numero F I, ex factis F G, G H, H I compofito, æqualem effe. Cum enim numerus A, numerum B C multiplicans, numerum F G fecerit; ut unitas ad A, ita erit B C ad F G. Pari ratione ut unitas ad eundem A, ita C D ad G H, et D E ad H I. Eft igitur B C ad F G ut C D ad G H, et ut D E ad H I. Quare et B E, [i] 12. hujus. ex omnibus B C, C D, D E compofitus, ad F I, ex omnibus F G, G H, G I compofitum, ut B C ad F G [i]; *i. e.* ut unitas ad A. Sed cum A multiplicans B E numerum K fecerit; ut unitas ad A, ita erit B E ad K. Quare B E ad K ut B E ad F I. Quare K et F I inter fe æquales. *Q. E. D.*

*Cor.** Hinc quæcunque de rectangulis fub fegmentis lineæ rectæ in fecundo Elementorum Libro ad Euclide demonftrata funt; ea omnia in numeris etiam planis locum habent ex partibus numeri cujufvis factis.

PROP.

## PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

*Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem.*

Sint C D, E F minimi, qui eandem quam A, B inter se rationem habeant. Dico C D æqualiter ipsum A metiri, atque E F ipsum B.

Cum enim numerus A ad B eandem quam C D ad E F rationem habeat; permutando, erit A ad C D ut B ad E F[k]. Duo autem C D, E F duobus A, B singuli singulis sunt minores[l]. Quæ pars igitur est C D ipsius A, vel quæ partes, eadem pars erit E F ipsius B, vel eædem partes[m]. At vero ipsorum A, B neutiquam sunt illi C D, E F partes. Sint enim, si esse possint. Quot sunt igitur in C D partes illius A, tot erunt in E F partes illius B. Dividatur igitur C D in partes numeri A, quæ sint C G, G D; et E F dividatur in partes numeri B, quæ sint E H, H F. Jam cum C G, G D sint inter se æquales, necnon E H, H F; erit C G ad E H ut G D ad H F. Numero autem æquales illi C G, G D illis E H, H F. Erit igitur ut unus antecedentium ad suum consequentem, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes[n]. Quare ut C G ad E H ita C D ad E F. Ac propterea C G, E H, eandem inter se rationem quam C D, E F habent, minores cum sint. Quod fieri nequit. Ponuntur enim C D, E F omnium minimi, qui eandem inter se rationem habent. Numeri igitur A neque partes est C D, neque numeri B ille E F. Pars igitur C D numeri A, numerique B eadem pars E F. Æqualiter igitur C D metitur ipsum A, atque E F ipsum B. *Q. E. D.*

A . . . . . . . . . .
B . . . . . .
C . . . G . . D
E . . H . F

[k] 13. hujus.
[l] ex hyp.
[m] Def. 3, 4. & 20. hujus.
[n] 12. hujus.

## PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

*Si sint tres numeri, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eâdem ratione erunt.*

Sint tres numeri A, B, C, et alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur et in eâdem ratione se. D, E, F; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad F, ut autem B ad C ita D ad E: dico etiam ex æquo ut A ad C ita esse D ad F.

Quoniam enim eft ut A ad B ita E ad F; qui fit ex A, F æqualis erit[o] ei, qui ex B, E. Rurfus, quoniam eft ut B ad C ita D ad E; qui fit ex C, D æqualis erit ei, qui ex B, E. Oftenfum autem eft et qui fit ex A, F æqualem effe ei, qui ex B, E: ergo et qui fit ex A, F æqualis eft ei, qui fit ex C, D. Igitur[o] ut A ad C ita D ad F. *Q. E. D.*

[o] 19. hujus.

| | |
|---|---|
| A . . . . . . | D . . . . . . . . . . . . |
| B . . . . | E . . . . . . . . . |
| C . . . | F . . . . . . |

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

*Numeri primi inter fe minimi funt omnium eandem cum ipfis rationem habentium.*

Sint numeri A, B primi inter fe: dico eos minimos effe omnium eandem cum ipfis rationem habentium.

Sint enim C, D minimi omnium in ratione A ad B. Quoniam igitur[p] minimi numeri eandem cum ipfis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eft, antecedens antecedentem et confequens confequentem; numerus C ipfum A æqualiter metietur, atque D ipfum B. Quoties autem C metitur ipfum A, tot unitates fint in E. Ergo quot funt unitates in numero E, toties D metietur B. Sed cum numerus C æqualiter metiatur A, ac unitas numerum E[q]; permutando, E æqualiter metietur A, ac unitas numerum C[r]. Metitur igitur E numerum A. Similiter oftendemus E numerum B metiri. Eft igitur E numerorum A, B menfura communis. Numeri autem A, B, cum fint inter fe primi[q], nullam habent menfuram communem præter ipfam unitatem[s]. Unitas igitur eft E. Quot vero funt in E unitates, tot numeri funt in A numero C æquales[q]. Cum igitur unitas fit E, numerus A numero C æqualis erit. Similiter oftendetur numerus B numero D æqualis. Sed ponuntur C, D minimi omnium in ratione numerorum A, D. Ergo et A, B minimi omnium in mutuâ ipforum ratione. *Q. E. D.*

[p] 21. hujus.
[q] ex hyp.
[r] 15. hujus.
[s] Def. 12.

| | |
|---|---|
| A . . . . . | B . . . . |
| C ----- | D ---- |
| E---- | |

PROP.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Minimi numeri eorum, qui eandem cum ipſis rationem habent, primi inter ſe ſunt.*

Sint A, B minimi numeri eorum, qui eandem cum ipſis rationem habent: dico A, B primos inter ſe eſſe.

Si enim non ſunt A, B inter ſe primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque C. Et quoties C ipſum quidem A metitur, tot unitates ſint in D; quoties vero C metitur ipſum B, tot unitates ſint in E.

A . . . . . . B . . . . .
C -------
D ----- E ---

Et quoniam C ipſum A metitur per unitates, quæ ſunt in D; C multiplicans ipſum D fecit A. Eâdem ratione et C multiplicans E ipſum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros D, E multiplicans fecerit A, B; erit[s] ut D ad E ita A ad B. Ergo D, E in eâdem ſunt ratione, in quâ A, B, minores ipſis exiſtentes, quod[t] fieri non poteſt. Non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter ſe ſunt. *Q. E. D.*

[s] 17. hujus.
[t] ex hyp.

## PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

*Si duo numeri primi inter ſe fuerint; qui unum ipſorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.*

Sint duo numeri primi inter ſe A, B; et aliquis numerus C ipſum A metiatur: dico B, C inter ſe primos eſſe.

Si enim B, C non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, ſitque D. Et quoniam D ipſum C metitur, et C ipſum A; et D ipſum A metietur. Metitur autem et ipſum B. Ergo D numeros A, B metitur primos inter ſe exiſtentes, quod[u] fieri non poteſt. Non igitur numeros C, B numerus aliquis metietur; ideoque C B inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

A . . . . . .
B . . . . .
C . . .
D ---

[u] Def. 12. hujus.

## PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

*Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint; et qui fit ex ipſis, ad eum primus erit.*

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum C primi ſint; et A ipſum B multiplicans faciat D: dico C, D inter ſe primos eſſe.

Si enim C, D non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque E.

Et quoniam C, A primi inter se sunt, et ipsum C metitur aliquis numerus
x 25. hujus E; erunt x E, A inter se primi. Quoties autem E ipsum D metitur, tot unitates sint in F: quare et F metitur ipsum D per unitates, quæ sunt in E: ergo E ipsum F multiplicans fecit D. Sed et A multiplicans B ipsum D fecit. Qui igitur fit ex E, F, est æqualis ei, qui ex A, B. Si vero qui fit ex extremis æ-
y 19. hujus. qualis fuerit ei, qui ex mediis y; quatuor numeri proportionales erunt. Est igitur ut E ad A, ita B ad F. Sunt
z 23. hujus. autem A, E inter se primi; et qui primi etiam z minimi sunt; minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium eos, qui eandem habent rationem, æqualiter meti-
a 21. hujus. untur a, major majorem, minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem: ergo E ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum C: quare E ipsos B, C metitur, primos inter se existentes: quod fieri non potest. Non igitur C, D numeros numerus aliquis metietur; ac proptera C, D inter se primi sunt. *Q. E. D.*

A . .   B . . .
C . . . . .
D . . . . . .
E -----
F ---

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

*Si duo numeri primi inter se fuerint; qui fit ab uno ipsorum, ad reliquum primus erit.*

Sint duo numeri inter se primi A, B; et A seipsum multiplicans faciat C: dico B, C inter se primos esse.

Ponatur enim ipsi A æqualis D. Et quoniam A, B sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D; et D, B inter se primi erunt. Uterque igitur ipsorum A, D ad B pri-
b 26. hujus. mus est: ergo et qui ex A, D fit b, primus erit ad B. Sed qui fit ex A, D, est numerus C. Quare C, B inter se primi sunt. *Q. E. D.*

A . .   B . . .
C . . . .
D . .

[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

*Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; et qui fiunt ex ipsis, inter se primi erunt.*

Duo enim numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi sint; et A quidem ipsum B multiplicans

multiplicans faciat E; C vero multiplicans D faciat F: dico E, F inter se primos esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad C primus est; et qui fit ex A, B[c], ad C primus erit. Qui autem fit ex A, B est E: ergo E, C primi inter se sunt. Eâdem ratione et E, D primi sunt inter se. Uterque igitur ipsorum C, D ad E primus est: ac propterea[c] qui fit ex C, D, primus erit ad E. Qui vero ex C, D fit, est numerus F. Ergo E, F primi inter se erunt. *Q. E. D.* [c] 26. hujus.

A . . .  B . . . . .
E . . . . . . . . . . . . . . .
C . .  D . . . .
F . . . . . . . .

PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

*Si duo numeri primi inter se fuerint, et uterque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis primi inter se erunt: et si numeri a principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos faciant; et ipsi inter se primi erunt; et semper circa extremos hoc continget.*

Sint duo numeri inter se primi A, B, et A seipsum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E; et B seipsum multiplicans faciat D, multiplicans autem D faciat ipsum F: dico C, D et E, F inter se primos esse.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt; et A seipsum multiplicans fecit C; erunt[d] C, B primi inter se. [d] 27. hujus.

A . .  B . . .
C . . . .  D . . . . . . . . .
E . . . . . . . .  F . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Et quoniam C, B inter se primi sunt, et B seipsum multiplicans fecit D; erunt C, D inter se primi. Rursus quoniam A, B primi sunt inter se, et B seipsum multiplicans fecit D; A, D inter se primi erunt. Cum igitur duo numeri A, C ad duos numeros B, D, uterque ad utrumque, primi sint; et qui ex A, C fit ad eum, qui fit ex B, D[f], primus erit. Sed qui fit ex A, C est numerus E, qui vero ex B, D fit est F. Ergo E, F primi inter se sunt. *Q. E. D.* [f] 28. hujus.

PROP.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

*Si duo numeri primi inter se fuerint; et uterque simul ad utrumque ipsorum primus erit: quod si uterque simul ad unum aliquem ipsorum sit primus, et numeri a principio positi inter se primi erunt.*

Componantur enim duo numeri inter se primi, A B, B C: dico et utrumque simul, videlicet A C, ad utrumque ipsorum A B, B C primum esse.

Si enim non sint C A, A B inter se primi, metietur eos numerus aliquis. Metiatur, et sit D. Quoniam igitur D metitur ipsos C A, A B; et reliquum B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipsos A B, B C metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. Non igitur C A, A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B, A C inter se primi sunt. Ergo C A ad utrumque ipsorum A B, B C est primus.

A . . . . . B . . . . C
D -------

Sint rursus C A, A B primi inter se: dico et ipsos A B, B C inter se primos esse.

Si enim A B, B C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur utrumque ipsorum A B, B C, et totum C A metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsos C A, A B metitur primos inter se existentes, quod fieri non potest. Non igitur ipsos A B, B C numeros numerus aliquis metietur, ideoque A B, B C inter se primi sunt. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

*Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.*

Sit primus numerus A, et numerum B non metiatur: dico B, A inter se primos esse.

Si enim non sint B, A inter se primi, metietur eos aliquis numerus. Metiatur, et sit C: ergo[f] C non est unitas. Et quoniam C ipsum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C idem qui A.

A . . . B . . . . .
C ----

[f] Def. 11. hujus.

Et quoniam C ipsos B, A metitur; metietur etiam ipsum A primum existentem, licet non sit idem cum eo; quod fieri

fieri non poteſt. Non igitur ipſos B, A numeros numerus aliquis metietur: quare A, B inter ſe primi ſunt. *Q. E. D.*

## PROP. XXXII. THEOR. [XXXII.]

*Si duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus: et unum ipſorum, qui a principio poſiti ſunt, metietur.*

Duo enim numeri A, B ſe invicem multiplicantes faciant C, ipſum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui ſit D: dico D unum ipſorum A, B metiri.

Ipſum enim A non metiatur, atque eſt D numerus primus: ergo [g] A, D primi inter ſe ſunt. Et quoties D ipſum C metitur, tot unitates ſint in E. Quoniam igitur D metitur ipſum C per eas quæ ſunt in E unitates; numerus D ipſum E multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipſum C fecit. Ergo qui fit ex D, E æqualis eſt ei, qui ex A, B: eſt igitur [h] ut D ad A ita B ad E. Et ſunt D, A primi inter ſe; primi vero [i] ſunt et minimi, ſed [k] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem; ergo D ipſum B metitur. Similiter demonſtrabimus, ſi D non metiatur B, metiri ipſum A. Quare D metitur unum ipſorum A, B. *Q. E. D.*

| | |
|---|---|
| A | . . |
| B | . . . . . . |
| C | . . . . . . . . . . . . |
| D | . . . |
| E | . . . . |

[g] 31. hujus.
[h] 19. hujus.
[i] 23. hujus.
[k] 21. hujus.

## PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

*Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.*

Sit compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipſum A.

Quoniam enim A eſt compoſitus numerus [l], metietur ipſum aliquis numerus. Metiatur, et ſit B. Et ſi quidem primus eſt B, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, ipſum aliquis numerus metietur. Metiatur, ſitque C. Et quoniam C metitur ipſum B; B vero ipſum A; et C ipſum A metitur. Et ſi quidem primus eſt C, manifeſtum eſt quod quæritur. Si vero compoſitus, eum aliquis numerus

| | |
|---|---|
| A | . . . . . . . . |
| B | . . . . |
| C | . . |

[l] Def. 13. hujus.

merus metitur; et hâc consideratione factâ, relinquetur tandem aliquis numerus primus, et qui ipsum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor, quod [m] in numeris fieri non potest; ergo relinquetur aliquis, qui et praecedentem metietur et ipsum A.

A . . . . . . . .
B . . . .
C . .

[m] Def. 2. hujus.

Omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. *Q. E. D.*

Aliter. Sit compositus numerus A: dico primum aliquem numerum ipsum metiri.

Quoniam enim A compositus est [n], metietur ipsum aliquis numerus. Sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur: dico B primum esse.

[n] Def. 13. hujus.

Si enim non; erit compositus: ergo eum aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque C metiens ipsum: erit igitur C minor quam B. Et quoniam C ipsum B metitur, sed et B ipsum A; et C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium qui metiuntur A; quod est absurdum: igitur B non est compositus numerus. Ergo est primus. *Q. E. D.*

A . . . . . . . . .
B . . .
C --

[XXXV.] PROP. XXXIV. PROBL.

*Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis rationem habeant.*

Sint dati quotcunque numeri A, B, C: oportet invenire minimos omnium, qui eandem cum ipsis A, B, C rationem habeant.

Vel igitur A, B, C primi inter se sunt, vel non. Si quidem primi, et minimi erunt [o] omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

[o] 23. hujus.

A . . . . . .  B . . . . . . . .  C . . . . . . . . . .
D . .
E . . .  F . . . .  G . . . . .
H ---  K ----  L -----
M --

[p] 3. hujus.

Si vero non. Sumatur [p] ipsorum A, B, C maxima communis mensura D, et quoties D unumquemque ipsorum

forum A, B, C metitur, tot unitates sint in unoquoque horum E, F, G; et unusquisque igitur ipsorum E, F, G unumquemque ipsorum A, B, C metitur per eas, quæ sunt in D unitates: ergo E, F, G ipsos A, B, C æqualiter metiuntur; ac propterea[q] E, F, G in eâdem sunt ratione, in quâ ipsi A, B, C. Dico eos etiam minimos esse. Si enim E, F, G non sint minimi eandem cum ipsis A, B, C rationem habentium; erunt aliqui, ipsis E, F, G minores, in eâdem ratione, in quâ A, B, C. Sint H, K, L: æqualiter igitur[r] H metitur ipsum A, ac uterque ipsorum K, L utrumque B, C metitur. Quoties autem H metitur ipsum A, tot unitates sint in M; et uterque igitur K, L utrumque B, C metitur per eas quæ sunt in M unitates. Et quoniam H ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in M; et M ipsum A per unitates quæ sunt in H metietur. Eâdem ratione et M utrumque ipsorum B, C metietur per unitates, quæ sunt in utroque K, L. Ergo M ipsos A, B, C metitur. Rursus, quoniam H ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in M; H ipsum M multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit: ergo qui ex E, D fit ei qui fit ex H, M est æqualis: ut igitur E ad H ita[s] M ad D. Major autem est E quam H: ergo et M quam D est major, et ipsos A, B, C metitur, quod fieri non potest; ponitur enim D ipsorum A, B, C maxima communis mensura. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E, F, G in eâdem ratione, in quâ A, B, C: ergo E, F, G minimi sunt eorum, qui eandem cum ipsis A, B, C rationem habent. *Q. E. D.*

[q] 18. hujus.
[r] 21. hujus.
[s] 19. hujus.

## PROP. XXXV. PROBL. [XXXVI.]

*Duobus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.*

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum A, B inter se primi, et A ipsum B multiplicans faciat C; ergo[t] et B multiplicans A ipsum C fecit; ac propterea numeri A, B ipsum C metiuntur. Dico etiam C minimum esse. Sit enim D numerus aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipsum

A . . .   B . . . .
C . . . . . . . . . . . .
D -------------
E ---   F ----

[t] 16. hujus.

ipsum D metitur, tot unitates sint in E, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in F: ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D; B vero multiplicans F ipsum D fecit. Quare numerus, qui ex A, E fit, est æqualis ei, qui fit ex B, F: ut igitur A ad B, ita est[a] F ad E. Et sunt A, B primi, primi autem[x] et minimi: sed[y] minimi eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem. Ergo B ipsum E metitur consequens consequentem. Et quoniam A numeros B, E multiplicans fecit C, D, erit[z] ut B ad E, ita C ad D. Metitur autem B ipsum E: ergo et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C alio quolibet eorum, quos numeri A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

| | |
|---|---|
| A . . . | B . . . . |
| C . . . . . . . . . . . . | |
| D ------------- | |
| E --- | F ---- |

[u] 19. hujus.
[x] 23. hujus.
[y] 21. hujus.
[z] 18. hujus.

Sed non sint A, B primi inter se; et sumantur[a] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui sint F, E: æqualis igitur est[u] qui ex A, E fit ei, qui ex B, F. Et A ipsum E multiplicans faciat C: ergo et B multiplicans F ipsum C fecit: quare A, B ipsum C metiuntur. Dico et minimum esse. Sit enim D aliquis eorum, quos A, B metiuntur; et quoties A ipsum D metitur, tot unitates sint in G, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in H: ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsum D fecit: qui igitur ex A, G fit est æqualis ei, qui fit ex B, H: ut igitur A ad B, ita[u] H ad G. Sed ut A ad B, ita F ad E: ergo et ut F ad E, ita H ad G. Et[b] sunt F, E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur[y], major majorem, et minor minorem: quare E ipsum G metitur. Et quoniam A numeros E, G multiplicans ipsos C, D fecit, ut E ad G ita erit[c] C ad D. Sed E metitur ipsum G: ergo[d] et C ipsum D metitur. Est igitur C numero D minor. Similiter ostendetur numerus C quolibet eorum, quos A, B metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

| | |
|---|---|
| A . . . . | B . . . . . . |
| F . . | E . . . |
| C . . . . . . . . . . . . | |
| D -------------- | |
| G --- | H -- |

[a] 35. hujus.
[b] Per construct.
[c] 17. hujus.
[d] Def. 20. hujus.

PROP.

## PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVII.]

*Si duo numeri metiantur numerum aliquem; et minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.*

Duo enim numeri A, B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E: dico et E ipsum C D metiri.

Si enim E non metitur C D, E metiens F D relinquat seipso minorem C F. Et quoniam A, B ipsum E metiuntur, E vero ipsum D F; et A, B metientur D F. Sed et metiuntur totum C D: ergo et reliquum C F minorem ipso E metientur, quod[e] fieri non potest. Non igitur E non metitur ipsum C D, metitur igitur. *Q. E. D.*

A . .  B . . .
C . . . . . . F ------- D
E . . . . . .

e ex hyp.

## PROP. XXXVII. PROBL. [XXXVIII.]

*Tribus numeris datis, invenire minimum numerum, quem metiantur.*

Sint dati numeri A, B, C: oportet invenire minimum numerum, quem metiantur.

Sumatur[f] numerus D minimus, quem duo A, B metiuntur. Itaque C vel metitur D, vel non metitur. Metiatur primum. Sed et A, B metiuntur ipsum D: ergo A, B, C ipsum D metientur. Dico illum esse minimum. Sit enim E numerus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Quoniam igitur A, B, C metiuntur ipsum E, et A, B ipsum E metiuntur: ergo[g] et minimus, quem metiuntur A, B, ipsum E metietur. Minimus autem, quem metiuntur A, B, est D: quare D metitur ipsum E. Minor igitur est D numero E. Similiter ostendetur D minor quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . .  B . . . .  C . . . . . .
D . . . . . . . . . . . .
E ------------------

f 36. hujus.

g 37. hujus.

Non metiatur autem C ipsum D, et sumatur[f] minimus numerus E, quem C, D metiantur. Itaque quoniam A, B metiuntur ipsum D; D vero ipsum E: et A, B ipsum E metientur. Metitur autem et C ipsum E: ergo

ergo A, B, C ipſum E metiuntur. Dico illum etiam eſſe minimum. Sit enim F unus aliquis eorum, quos A, B, C metiuntur. Et quoniam A, B, C metiuntur F, et A, B
[g] 37. hujus. ipſum F metientur: ergo[h] et minimus, quem A, B metiuntur, metietur ipſum F. Minimus autem, quem A, B metiuntur, eſt D: quare D ipſum F metitur. Sed et C metitur ipſum F: ergo D, C ipſum F metiuntur; ac propterea minimus, quem metiuntur D, C, metietur et F.
[i] Per conſtruct. Sed[i] minimus, quem metiuntur D, C, eſt E: ergo E ipſum F metitur. Minor igitur eſt E numero F. Similiter oſtendetur E alio quolibet eorum, quos A, B, C metiuntur, minor. Omnium igitur minimus. *Q. E. D.*

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . .
E . . . . . . . . . . . .
F ---------------

SCHOLION.*

Reliqua tria hujus Libri Theoremata vix credo ab Euclide fuiſſe.

[XXXIX.] PROP. XXXVIII. THEOR.

*Si numerum numerus aliquis metiatur; ille, quem metitur, partem babebit a metiente denominatam.*

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipſo B denominatam.

Quoties enim B ipſum A metitur, tot unitates ſint in C; et quoniam B metitur ipſum A per eas, quæ ſunt in C unitates; metitur autem et unitas D ipſum C per unitates, quæ in ipſo ſunt; et D unitas ipſum C numerum æqualiter metietur, at-
[k] 15. hujus. que B ipſum A: quare permutando[k] unitas D ipſum B numerum æqualiter metietur, atque C ipſum A: quæ igitur pars eſt unitas D ipſius B numeri, eadem pars eſt et C ipſius A. Sed unitas D ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata: ergo et C ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B. Quare A partem habet ſc. C ab ipſo B denominatam. *Q. E. D.*

A . . . . . . . . . . . .
B . . .
C . . . .
D .

## PROP. XXXIX. THEOR. [XL.]

*Si numerus partem quamcumque habeat; eum numerus a parte denominatus metietur.*

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et ab ipsâ parte B denominatus sit numerus C: dico C ipsum A metiri.

Quoniam enim B ipsius A pars est, et denominata ab ipso C; est autem et unitas D ipsius C numeri pars ab ipso denominata: quæ igitur pars est unitas D ipsius C numeri, eadem pars est et B ipsius A: ergo unitas D æqualiter metitur ipsum C numerum, atque B ipsum A; et permutando [l] unitas [l] D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. Ergo C ipsum A metitur. *Q. E. D.* [l] 15. hujus.

A . . . . . . . . . . . .
B . .
C . . . . . .
D .

## PROP. XL. PROBL. [XLI.]

*Numerum invenire, qui minimus cum sit datas partes habeat.*

Sint datæ partes A, B, C: oportet numerum invenire, qui cum minimus sit habeat datas partes A, B, C.

Sint ab ipsis A, B, C partibus denominati numeri D, E, F, et sumatur [m] minimus numerus G, quem ipsi D, E, F metiuntur. Quoniam igitur D, E, F metiuntur ipsum G; habebit [n] G partes ab ipsis D, E, F denominatas. Partes autem denominatæ ab ipsis D, E, F [o] sunt A, B, C; ergo G partes A, B, C habet. Dico et minimum esse. Si enim G non sit minimus, partes habens A, B, C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. Sit H. Quoniam igitur H partes habet A, B, C; eum [p] metientur numeri ab ipsis A, B, C partibus denominati. Sunt autem hi numeri D, E, F: ergo D, E, F ipsum H metientur minorem ipso G, quod fieri non potest. Non igitur erit aliquis numerus minor ipso G, qui partes A, B, C habeat. *Q. E. D.*

A $\frac{1}{2}$ D . .
B $\frac{1}{3}$ E . . .
C $\frac{1}{4}$ F . . . .
G . . . . . . . . . . . .
H - - - - - - - - - - - - - -

[m] 38. hujus.
[n] 39. hujus.
[o] Per constructionem.
[p] 40. hujus.

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER OCTAVUS.

### PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

*Si ſint quotcunque numeri, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.*

SINT quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D primi inter ſe ſint: dico A, B, C, D minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Si enim non, ſint minores ipſis A, B, C, D numeri E, F, G, H, et in eâdem ratione. Et quoniam A, B, C, D

| | | | |
|---|---|---|---|
| A,* 8. | B, 12. | C, 18. | D, 27. |
| E --- | F ---- | G ----- | H ------ |

ſunt in eâdem ratione, in quâ E, F, G, H, atque eſt ipſorum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipſorum E, F, G, H: erit ex æquo[a] ut A ad D ita E ad H. Et[a] 14. ſept. ſunt A, D primi; primi autem et minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem rationem habent[b], [b] 21. ſept. antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: ergo A ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt. Non igitur E, F, G, H minores ipſis A, B, C, D exiſtentes in eâdem ſunt ratione cum ipſis: ac propterea

* *In hoc et ſequenti libro Literis adjecimus numeros illis reſpondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex neceſſitate adhibenda, moleſtiam crearet lectoribus.*

A, B, C, D minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. *Q. E. D.*

## [II.] PROP. II. PROBL.

*Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.*

Sit data ratio in minimis numeris, ea sc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor; et A seipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D; et B seipsum multiplicans faciat E; et adhuc A multiplicans C, D, E ipsos F, G, H faciat; B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit C, multiplicans vero B ipsum D fecit, numerus A duos numeros A, B multiplicans fecit C, D:

A, 2. B, 3.
C, 4. D, 6. E, 9.
F, 8. G, 12. H, 18. K, 27.

[c] 17. sept. est igitur [c] ut A ad B, ita C ad D. Rursus, quoniam A ipsum B multiplicans fecit D, et B seipsum multiplicans fecit E; uterque ipsorum A, B multiplicans B utrumque ipsorum D, E fecit:
[d] 18. sept. ut igitur A ad B, ita [d] D ad E. Sed ut A ad B, ita C ad D: ergo et ut C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros C, D multiplicans ipsos F, G fecit: ut C ad D, ita erit F ad G. Ut autem C ad D, ita erat A ad B; quare ut A ad B, ita F ad G. Rursus, quoniam A numeros D, E multiplicans fecit G, H: erit ut D ad E, ita G ad H. Sed ut D ad E, ita A ad B: ergo ut A ad B, ita G ad H. Et quoniam A, B ipsum E multiplicantes fecerunt H, K; erit ut A ad B, ita H ad K. Ostensum autem est et ut A ad B, ita esse et F ad G, et G ad H: ergo ut F ad G, ita G ad H, et H ad K: numeri igitur C, D, E et etiam F, G, H, K proportionales sunt in ratione, quam habet A ad B. Dico etiam et minimos esse. Nimirum tres C, D, E in ternis minimos, quatuor item F, G, H, K
[e] ex hyp. minimos in quaternis. Quoniam enim [e] A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium;
[f] 23. sept. minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium [f] et primi sunt inter se: erunt ipsi A, B inter se primi. Et uterque quidem ipsorum A, B seipsum multiplicans utrumque C, E fecit; utrumque vero C, E multiplicans fecit

fecit utrumque F, K: ergo [g] C, E et F, K primi inter se [g] funt. Si autem fint quotcunque numeri deinceps proportionales, et eorum extremi fint inter se primi; minimi [h] erunt omnium eandem cum ipfis rationem habentium: ergo et C, D, E et etiam F, G, H, K minimi funt omnium eandem cum ipfis A, B rationem habentium. *Q. E. D.* [g] 29. fept. [h] 1. hujus.

*Cor.* 1. Ex hoc manifeftum eft, fi tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipfis rationem habentium, extremos eorum quadratos effe; fi vero quatuor, effe cubos.

*Cor.* 2. * Si A, B non fint omnium in datâ ratione minimi, fimili tamen modo inveniendi funt numeri deinceps proportionales, in datâ ratione ipfius A ad B, fed qui minimi non erunt.

## PROP. III. THEOR. [III.]

*Si fint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipfis rationem habentium; eorum extremi primi inter fe erunt.*

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, minimi omnium eandem cum ipfis rationem habentium: dico eorum extremos A, D inter fe primos effe.

Sumantur enim [i] duo numeri minimi in ratione ipforum A, B, C, D, qui fint E, F; tres vero G, H, K; et femper deinceps uno plures, quoad affumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipforum A, B, C, D. Sumantur, et fint L, M, N, O. [i] 2. hujus.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 8. | B, 12. | C, 18. | D, 27. |
| E, 2. | F, 3. | | |
| G, 4. | H, 6. | K, 9. | |
| L, 8. | M, 12. | N, 18. | O, 27. |

Extremi igitur ipforum L, O primi inter fe funt. Quoniam enim E, F primi inter fe funt, et uterque ipforum feipfum multiplicans utrumque G, K fecit; utrumque vero G, K multiplicans fecit utrumque L, O: erunt [k] et G, K et L, O primi. Et quoniam A, B, C, D minimi funt eorum eandem cum ipfis rationem habentium; funt autem et L, M, N, O minimi in eàdem ratione, in quâ A, B, C, D; eftque ipforum A, B, C, D multitudo æqualis multitudini ipforum L, M, N, O: erit unufquifque ipforum A, B, C, D unicuique ipforum L, M, N, O æqualis: ergo A quidem eft æqualis L, et D ipfi O. Et [k] 29. fept.

 quoniam

quoniam L, O primi ſunt inter ſe, L vero ipſi A æqualis, et O ipſi D; et A, D inter ſe primi erunt. *Q. E. D.*

## [IV.] PROP. IV. PROBL.

*Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.*

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio A ad B, et ratio C ad D, et ratio E ad F: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione A ad B, et in ratione C ad D; et adhuc in ratione E ad F.

[l] 36. ſept. Sumatur enim [l] minimus numerus, quem B, C metiuntur; ſitque G. Et quoties B metitur G, toties A ipſum H metiatur: quoties vero C ipſum G metitur, toties

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 2. | B, 5. | C, 3. | D, 4. | E, 5. | F, 6. |
| H, 6. | G, 15. | K, 20. | L, 24. | | |
| N --- | O ----- | M ------ | P -------- | | |

et D metiatur K. Itaque E ipſum K vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties E metitur K, toties F ipſum L metiatur. Et quoniam A æqualiter

[m] 13. ſept. metitur H, atque B ipſum G; erit [m] ut A ad B, ita H ad G. Eâdem ratione et ut C ad D, ita G ad K, et adhuc ut E ad F, ita K ad L. Ergo H, G, K, L deinceps proportionales ſunt in ratione A ad B, et in ratione C ad D, et adhuc in ratione E ad F. Dico etiam minimos eſſe. Si enim non ſint H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipſis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint N, O, M, P. Et quoniam eſt ut A ad B ita N ad O; et ſunt A, B mi-

[n] 21. ſept. nimi; minimi autem eos, qui eandem habent rationem [n], æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem, hoc eſt, antecedens antecedentem et conſequens conſequentem: metietur B ipſum O. Eâdem ratione et C ipſum O metietur: quare B, C metiuntur O: ac propte-

[o] 37. ſept. rea [o] minimus, quem metiuntur B, C, ipſum O metietur.

[p] ex hyp. Minimus autem, quem metiuntur B, C [p], eſt G: ergo G metietur O, major minorem; quod fieri non poteſt. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis H, G, K, L deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F.

Sed

Sed non metiatur E ipsum K. Et sumatur[q] minimus[q 36. sept.] numerus, quem ipsi E, K metiuntur; sitque M. Quoties autem K metitur M, toties et uterque ipsorum H, G utrumque N, O metiatur; et quoties E metitur M, toties et F metiatur P. Quoniam igitur H ipsum N æqualiter metitur, atque G ipsum O; erit[r] ut H ad G, ita N ad O.[r 13. sept.] Ut autem H ad G, ita A ad B; quare ut A ad B, ita N ad O. Eâdem ratione ut C ad D, ita O ad M. Rursus,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 4. | B, 5. | C, 2. | D, 3. | E, 4. | F, 3. |
| H, 8. | G, 10. | K, 15. | | | |
| N, 32. | O, 40. | M, 60. | P, 45. | | |
| Q -- | R --- | S ---- | T --- | | |

quoniam E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum P; erit[r] ut E ad F, ita M ad P. Quare N, O, M, P deinceps proportionales sunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Dico minimos quoque esse. Si enim non sint N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; erunt aliqui numeri minores ipsis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. Sint Q, R, S, T. Et cum sit ut Q ad R, ita A ad B; sintque A, B minimi; minimi vero eos, qui eandem habent rationem[s], æqualiter metiuntur, ante-[s 21. sept.] cedens antecedentem et consequens consequentem: numerus B ipsum R metietur. Eâdem ratione et C metietur ipsum R; ergo B, C ipsum R metiuntur; et ob id[t] minimus, quem metiuntur B, C, ipsum R metietur.[t 37. sept.] Minimus autem, quem metiuntur B, C, est G: ergo G metitur ipsum R. Atque est[r] ut G ad R, ita K ad S: quare[u] et K ipsum S metitur. Metitur autem et E ip-[u Def. 20. sept.] sum S; ideoque E, K ipsum S metiuntur; et minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipsum S. Sed minimus, quem metiuntur E, K[x], est M: ergo M ip-[x ex hyp.] sum S metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N, O, M, P deinceps minimi in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F; ergo N, O, M, P deinceps minimi sunt in rationibus A ad B, et C ad D, et E ad F. *Q. E. D.*

[V.] PROP. V. THEOR.

*Plani numeri inter se rationem habent * ex lateribus compositam.*

Sint plani numeri A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D numeri: ipsius vero B latera sint E, F: dico A ad B rationem habere ex lateribus compositam.

[y] 4. hujus. Rationibus enim datis, videlicet quam habet C ad E, et quam D ad F, sumantur [y] numeri deinceps minimi G, H, K in rationibus C ad E, et D ad F; sitque ut C ad

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 6. | | B, 20. | |
| | L, 12. | | |
| C, 2. | D, 3. | E, 4. | F, 5. |
| G, 3. | H, 6. | K, 10. | |

E, ita G ad H: ut autem D ad F, ita H ad K. Ergo G, H, K inter se rationes habent laterum. Sed [z] ratio G ad K composita est ex ratione G ad H et ratione H ad K: quare G ad K rationem habet ex lateribus compositam. Dico igitur ut A ad B, ita esse G ad K. Numerus D ipsum E multiplicans faciat L. Et quoniam [a] D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit [b] ut C ad E, ita A ad L. Ut autem C ad E, ita [c] G ad H: ergo et ut G ad H, ita A ad L. Rursus, quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L; multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit L ad B. Sed ut D ad F, ita est H ad K; et igitur ut H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est et ut G ad H, ita A ad L: quare ex æquo [d] ut G ad K, ita A ad B. Sed [z] G ad K rationem habet compositam ex lateribus. Ergo et A ad B rationem habebit ex lateribus compositam. *Q. E. D.*

[z] Def. 5. sexti.
[a] Def. 16. sept.
[b] 17. sept.
[c] Per construct.
[d] 14. sept.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.*

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, et A ipsum B non metiatur: dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius *ex laterum rationibus.*

Et

Et quidem numeros A, B, C, D, E deinceps ſeſe non metiri, perſpicuum eſt. Neque enim A ipſum B metitur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. Dico

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A, 16. | B, 24. | C, 36. | D, 54. | E, 81. |
| F, 4. | G, 6. | H, 9. | | |

enim A, *ex. g.* non metiri ipſum C. Nam quot ſunt A, B, C, tot ſumantur[e] minimi numeri eandem cum ipſis A, B, C rationem habentes, et ſint F, G, H. Quoniam igitur F, G, H in eâdem ſunt ratione, in quâ A, B, C, atque eſt ipſorum A, B, C multitudo æqualis multitudini ipſorum F, G, H; erit ex æquo[f] ut A ad C, ita F ad H. Et quoniam eſt ut A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipſum B, neque[g] F ipſum G metietur: non igitur unitas eſt F; unitas enim[h] omnem numerum metitur. Et ſunt F, H primi inter ſe: ergo[i] neque F metitur ipſum H. Atque eſt ut F ad H, ita A ad C. Neque igitur A ipſum C metietur. Similiter demonſtrabimus neque alium ullum aliquem metiri. *Q. E. D.*

[e] 35. ſept. [f] 14. ſept. [g] Def. 20. ſept. [h] Def. 1. ſept. [i] Def. 12. ſept.

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; et ſecundum metietur.*

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A ipſum D metiatur: dico A ipſum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipſum B[k], neque alius aliquis ullum metietur, quod eſt abſurdum: ponitur enim A ipſum D metiri. Ergo et A ipſum B metietur. *Q. E. D.*

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

[k] 6. hujus.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter alios, eandem cum ipſis rationem habentes, cadent.*

Inter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales C, D; et fiat ut A ad B, ita E ad F: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter E, F deinceps proportionales cadere.

Quot

Quot enim numeri ſunt A, C, D, B, totidem ſumantur[l] minimi numeri eandem cum ipſis A, C, D, B rationem habentium G, H, K, L: ergo[m] extremi ipſorum G, L primi inter ſe ſunt. Et quoniam A, C, D, B ad

[l] 35. ſept. [m] 3. hujus.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 2. | C, 4. | D, 8. | B, 16. |
| G, 1. | H, 2. | K, 4. | L, 8. |
| E, 3. | M, 6. | N, 12. | F, 24. |

ipſos G, H, K, L in eàdem ſunt ratione, atque eſt ipſorum A, C, D, B multitudo æqualis multitudini ipſorum G, H, K, L; erit ex æquo[n] ut A ad B, ita G ad L. Ut autem A ad B, ita E ad F; et igitur ut G ad L, ita E ad F. Et ſunt G, L primi; ſed primi[o] ſunt et minimi; minimi vero eos qui eandem rationem habent[p] æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem: ergo G æqualiter metitur ipſum E, atque L ipſum F. Quoties autem G metitur ipſum E, toties et uterque ipſorum H, K utrumque M, N metiatur. Numeri igitur G, H, K, L ipſos E, M, N, F æqualiter metiuntur: ideoque[q] G, H, K, L in eâdem ſunt ratione, in quâ ipſi E, M, N, F. At G, H, K, L in eâdem ſunt ratione, in quâ A, C, D, B: ergo A, C, D, B in eâdem ratione erunt, in quâ E, M, N, F. Sed[r] A, C, D, B ſunt deinceps proportionales: ergo et E, M, N, F deinceps proportionales erunt. Quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem deinceps proportionales et inter E, F cadent. *Q. E. D.*

[n] 14. ſept. [o] 23. ſept. [p] 21. ſept. [q] Def. 20. ſept. [r] ex hyp.

*Cor.* * Hinc datis numeris duobus A, B, aliiſque duobus E, F qui eandem quam A, B inter ſe rationem habeant; datis etiam quotcunque inter A, B analogiâ mediis; totidem inter E, F analogiâ medii quâ ratione inveniantur, ſatis patet.

## [IX.] PROP. IX. THEOR.

*Si duo numeri inter ſe primi fuerint, et inter ipſos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipſos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter utrumque ipſorum et unitatem deinceps proportionales cadent.*

Sint duo numeri inter ſe primi A, B, et inter ipſos deinceps proportionales cadant C, D; exponaturque unitas E: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipſos A, B, totidem et inter utrumque ipſorum

rum A, B et unitatem E numeros deinceps proportionales cadere.

Sumantur enim [t] duo quidem numeri minimi F, G in eâdem ratione, in quâ sunt A, C, D, B; tres vero H, I, K, et semper deinceps uno plures, quoad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B, sumantur [t], [t] 35. sept. [t] 2. hujus.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 1.
F, 2. G, 3.
H, 4. I, 6. K, 9.
L, 8. M, 12. N, 18. O, 27.

et sint L, M, N, O. Itaque manifestum est [u] F seipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse L; et G seipsum multiplicantem fecisse K, multiplicantem vero K fecisse O. Est igitur E ad F, ut F ad H, et H ad L. Item E ad G, ut G ad K, et K ad O. Sunt igitur F, H proportione medii inter E, L; et G, K totidem proportione medii inter E, O. Quot vero sunt numeri L, M, N, O, sive A, C, D, B, tot sunt numerorum ordines ab E ultimum usque ordinem L, M, N, O. Quot sunt igitur numeri numerorum A, B intermedii, tot sunt intermedii numerorum ordines, inter E et ultimum ordinem L, M, N, O. At quot sunt inter E et ordinem ultimum intermedii numerorum ordines, tot sunt inter E et L, necnon inter E et O numeri proportione medii. Tot igitur sunt inter E et L, necnon inter E et O, quot inter ipsos A, B numeri proportione medii. Et quoniam L, M, N, O minimi sunt eandem cum ipsis F, G rationem habentium; sunt autem et A, C, D, B minimi eandem quam F, G rationem habentium; atque est ipsorum L, M, N, O multitudo æqualis multitudini ipsorum A, C, D, B: erit unusquisque ipsorum L, M, N, O unicuique ipsorum A, C, D, B æqualis: æqualis igitur est L ipsi A, et O ipsi B. At ostensi sunt numeri F, H inter E, L proportione medii. Iidem igitur F, H inter E, A proportione medii. Similiter G, K inter E, B proportione medii. Numerorum autem F, H, necnon numerorum G, K numerus numero mediorum inter A, B ostensus est æqualis. Quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem et inter utrumque ipsorum A, B, et unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. *Q. E. D.* [u] Per construct. 2. hujus.

Cor.

*Cor.* * Numeri inter se primi, inter quos unus cadit proportione medius, quadrati sunt. Quibus autem duo intercedunt proportione medii, primis inter se existentibus, ii cubi sunt.

[X.] PROP. X. THEOR.

*Si inter duos numeros et unitatem deinceps proportionales numeri ceciderint; quot inter utrumque ipsorum et unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos numeri proportionales cadent.*

Inter duos enim numeros A, B et unitatem C numeri deinceps proportionales cadant D, E, et F, G: dico quot inter utrumque ipsorum A, B et unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem et inter ipsos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Quoniam C unitas est ad D, ut D ad E; D seipsum multiplicans fecit E. Et cum C unitas sit ad D, ut E ad A; D multiplicans E fecit A. Simili modo ostendetur, F seipsum multiplicando fecisse G; et multiplicando G fecisse B. Numeri igitur D, F seipsum quisque, et a se

A, 8. I, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. H, 6. G, 9.
D, 2. F, 3.
C, 1.

factos multiplicando, numeros A, B fecerunt. Si capiantur igitur primum tres numeri in continuâ numerorum D, F ratione; tum in eâdem continuâ ratione quatuor; dein quinque; atque hoc semper fiat; in ordinem aliquem numerorum tandem devenietur, cujus A, B extremi erunt. Et ordinis illius tot erunt numeri, quot sunt ab unitate C, ordinem illum usque numerorum ordines. Ac proinde inter extremos A, B tot erunt intermedii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi A, B, intermedii numerorum ordines. Ast tot sunt inter unitatem C et A, tot etiam inter unitatem C et B, continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et ordinem illum, cujus extremi sunt A, B, intermedii numerorum ordines. Id enim patet ex 2ª hujus et duobus ejus corollariis. Tot igitur inter A et B continuâ proportione medii, quot inter unitatem C et A, vel inter unitatem C et B. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XI. THEOR. [XI.]

*Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; et quadratus ad quadratum duplicatam rationem babet ejus, quam latus babet ad latus.*

Sint quadrati numeri A, B et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad D.

Sit F unitas. Quoniam A numerus quadratus est, cujus latus numerus C; [t] numerus C seipsum multiplicans fecit A. Pari ratione D seipsum multiplicans fecit B. Ergo F unitas est ad C, ut C ad A. Et F unitas ad D, ut D ad B. Unitati igitur et numero A, necnon unitati et numero B, unus intercedit proportione medius. Quare et numeris A, B unus intercedit proportione medius [u].

| | | |
|---|---|---|
| A, 4. | E, 6. | B, 9. |
| C, 2. | | D, 3. |
| | F, 1. | |

[t] Def. 18. sept.

[u] 10. hujus.

Dico præterea proportionem A ad B duplicatam esse proportionem numeri C ad D. Numerus C numerum D multiplicans faciet aliquem. Faciat E. Quoniam C seipsum multiplicans fecit A, et D multiplicans fecit E, erit A ad E ut C ad D [x]. Rursum, quoniam D seipsum multiplicans fecit B, et multiplicans C fecit E; erit E ad B ut C ad D. Sed ut C ad D, ita est A ad E (id enim ostensum.) Quare A est ad E ut E ad B. Continua est igitur trium A, E, B proportio. Proportio igitur A ad B duplicata est A ad E, id est, ipsius C ad D duplicata. *Q. E. D.*

[x] 17. sept.

*Cor.* * Proportione medius inter duos quoscunque quadratos, mutuà laterum multiplicatione factus est. Continua autem trium ratio, laterum ratio est.

## PROP. XII. THEOR. [XII.]

*Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; et cubus ad cubum triplicatam babet rationem ejus, quam latus babet ad latus.*

Sint numeri cubi A, B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D: dico inter ipsos A, B duos numeros medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam habere rationem ejus, quam C habet ad D.

Sit

Sit K unitas. Numeri C, D ſeipſum quiſque multiplicando facient aliquos. Faciant E, G. Erit igitur K unitas ad C, ut C ad E; et K unitas ad D, ut D ad G.

A, 8. H, 12. I, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
C, 2. D, 3.
K, 1.

Quoniam A cubus eſt cujus latus C; et E quadratus cujus latus idem C; idcirco C multiplicans E fecerit A. Pari ratione D multiplicans G fecerit B. Erit igitur K unitas ad C ut E ad A; et K unitas ad D ut G ad B. Sed oſtenſum eſt unitatem eſſe ad C, ut C ad E; necnon unitatem ad D, ut D ad G. Unitatis igitur et numerorum C, E, A, necnon unitatis et numerorum D, G, B continua eſt proportio. Unitati igitur et A duo intercedunt proportione medii, C, E. Unitati quoque et B duo intercedunt D, G. Numeris igitur A, B totidem, duo nempe, intercedunt proportione medii [y].

[y] 10. hujus.

Dico præterea proportionem A ad B, ipſius C ad D triplicatam eſſe. Numerus C multiplicans D faciet aliquem. Faciat F. Numeri C, D numerum F multiplicantes duos aliquos facient. Facient duos H, I. Inter quadratos E, G eſt F proportione medius; et E ad F, necnon F ad G, ut C ad D [z]. Quoniam vero C multiplicans E fecit A, et multiplicans F fecit H; erit A [a] ad H ut E ad F, id eſt, ut C ad D. Rurſum, quoniam C multiplicans F fecit H, et D multiplicans F fecit I, erit [b] H ad I ut C ad D, id eſt, ex oſtenſis, ut A ad H. Denique cum D multiplicans F fecit I, et multiplicans G fecit B; erit I ad B ut F ad G, id eſt, ut C ad D, id eſt, ut A ad H. Numerorum igitur quatuor A, H, I, B continua eſt proportio. Proportio igitur A ad B ipſius A ad H, ſeu C ad D, triplicata [c]. *Q. E. D.*

[z] Cor. 11. hujus.
[a] 17. ſept.
[b] 18. ſept.
[c] Def. 11. quinti.

PROP.

## PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

*Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et unusquisque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt: et si positi a principio numeri factos multiplicantes alios faciant; et ipsi proportionales erunt; et semper circa extremos hoc contingit.*

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, C, sitque ut A ad B, ita B ad C, et ipsi A, B, C seipsos multiplicantes faciant D, E, F; ipsos vero D, E, F multiplicantes faciant G, H, K: dico numeros D, E, F et G, H, K deinceps proportionales esse.

Numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; uterque autem ipsorum A, B multiplicans L faciat utrumque M, N. Et rursus, B quidem multiplicans C ipsum O

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A, 2 | B, 4. | C, 8. | | |
| | D, 4. | L, 8. | E, 16. | O, 32. | F, 64. | |
| G, 8. | M, 16. | N, 32. | H, 64. | P, 128. | Q, 256. | K, 512. |

faciat; uterque vero ipsorum B, C multiplicans O faciat utrumque P, Q.

Eodem modo quo prius ostendemus D, L, E et G, M, N, H deinceps proportionales esse in ratione A ad B; et adhuc E, O, F et H, P, Q, K, deinceps esse proportionales in ratione B ad C. Atque est ut A ad B, ita B ad C: ergo et D, L, E in eâdem sunt ratione, in quâ E, O, F; et præterea G, M, N, H in eâdem ratione, in quâ H, P, Q, K. Estque ipsorum quidem D, L, E multitudo multitudini ipsorum E, O, F æqualis. Multitudo autem ipsorum G, M, N, H æqualis multitudini ipsorum H, P, Q, K: ex æquo igitur [d] ut D ad E, ita E ad F, et ut G ad H, ita H ad K. *Q. E. D.*

[d] 14. sept.

## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur.*

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A ipsum B metiatur: dico et latus C ipsum D metiri.

Numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat: ergo A, E, B [e] deinceps proportionales sunt in ratione C ad D.

[e] Cor. 11. Et hujus.

Et quoniam A, E, B deinceps sunt proportionales, metiturque A ipsum B : et [b] A ipsum E metietur. Atque est ut A ad E, ita C ad D : ergo [c] et C metitur ipsum D.

A, 4. E, 8. B, 16.
C, 2. D, 4.

[b] 7. hujus.
[c] Def. 20. sept.

Sed C metiatur ipsum D : dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam est ut C ad D, ita A ad E, metitur autem C ipsum D ; et A ipsum E metietur. Et sunt A, E, B deinceps proportionales. Metitur igitur et A ipsum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum; et latus latus metietur: et si latus metiatur latus; et quadratus quadratum metietur. *Q. E. D.*

## [XV.] PROP. XV. THEOR.

*Si numerus cubus metiatur cubum numerum; et latus latus metietur: et si latus latus metiatur; et cubus cubum metietur.*

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D : dico C ipsum D metiri.

Numerus enim C seipsum multiplicans faciat E, et multiplicans D faciat F ; D vero seipsum multiplicans

A, 8. H, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. F, 8. G, 16.
C, 2. D, 4.

faciat G ; et uterque ipsorum C, D multiplicans F utrumque H, K faciat. Manifestum autem est E, F, G et A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D ; et quoniam A, H, K, B deinceps proportionales sunt, metiturque A ipsum B [d] ; et A ipsum H metietur. Est autem ut A ad H, ita C ad D. Ergo [e] C ipsum D metietur.

[d] 7. hujus.
[e] Def. 20. sept.

Sed C metiatur D : dico et A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, H, K, B deinceps proportionales esse in ratione C ad D. Et quoniam C ipsum D metitur, estque ut C ad D, ita A ad H ; et A metitur ipsum H. Quare et A ipsum B metietur. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur; et ſi latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum.*

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D, et A non metiatur ipſum B: dico neque C ipſum D metiri.

Si enim metitur C ipſum D, et A ipſum B metietur[f]. Non metitur autem A ipſum B: non igitur C ipſum D metietur.

| | |
|---|---|
| A, 9. | B, 16. |
| C, 3. | D, 4. |

[f] 14. hujus.

Sed non metiatur C ipſum D: dico neque A ipſum B metiri.

Si enim A metitur ipſum B, et [f] C ipſum D metietur. Atqui C non metitur D; neque igitur A ipſum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur; et ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.*

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; et ipſius quidem A latus ſit C, ipſius vero B latus D: dico C ipſum D non metiri.

Si enim C metitur ipſum D, et A ipſum B metietur[g]. Atqui non metitur A ipſum B: non igitur C ipſum D metietur.

| | |
|---|---|
| A, 8. | B, 27. |
| C, 2. | D, 3. |

[g] 15. hujus.

Sed non metiatur C ipſum D: dico neque A ipſum B metiri.

Si enim A ipſum B metitur, et [g] C metietur ipſum D. Non metitur autem C ipſum D: neque igitur A ipſum B metietur. *Q. E. D.*

PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

*Inter duos ſimiles planos numeros unus medius proportionalis cadit; et planus ad planum duplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.*

Sint duo numeri plani inter ſe ſimiles A, B, et ipſius quidem A latera ſint C, D, ipſius vero B latera homologa ſint E, F. Et quoniam ſimiles plani ſunt, qui latera habent proportionalia[h]; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico

[h] Def. 21. ſept.

inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere; et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F.

Quoniam enim est ut C ad D, ita E ad F; et permutando ut C ad E, ita erit D ad F[i]. Et quoniam planus numerus est A, cujus latera C, D; numerus D ipsum C

A, 6. G, 12. B, 24.
C, 2. D, 3. E, 4. F, 6.

multiplicans fecit A. Eâdem ratione et E multiplicans F ipsum B fecit; numerus autem D ipsum E multiplicans faciat G. Et cum D ipsum quidem C multiplicans fecit A, multiplicans vero E fecit G; erit ut C ad E, ita A ad G[k]. Sed ut C ad E, ita D ad F; et igitur ut D ad F, ita A ad G. Rursus, quoniam E ipsum D multiplicans fecit G, multiplicans vero F ipsum B fecit; ut D ad F, ita erit G ad B[k]. Ostensum est autem et ut D ad F, ita esse A ad G; et igitur ut A ad G, ita G ad B: ergo A, G, B deinceps proportionales sunt. Ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

Dico et A ad B duplicatam rationem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A, G, B deinceps proportionales sunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus, quam habet ad G[l]. Atque est ut A ad G, ita C ad E, et D ad F. Ergo et A ad B duplicatam rationem habet ejus, quam C habet ad E, vel D ad F. *Q. E. D.*

*Cor.* * Inter duos similes planos qui est proportione medius, et ipse planus est, ex lateribus utique numerorum principio positorum non homologis factus.

[i] 13. sept.
[k] 17. sept.
[l] Def. 10. quinti.

## [XIX.] PROP. XIX. THEOR.

*Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt; et solidus ad solidum triplicatam rationem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.*

Sint duo numeri solidi inter se similes A, B, et ipsius quidem A latera sint C, D, E, ipsius vero B latera homologa sint F, G, H. Et quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia[m]; erit ut C ad D, ita F ad G, ut autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A, B duos medios

[m] Def. 11. sept.

medios proportionales cadere; et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam habet C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H.

Numerus enim C ipsum D multiplicans faciat K; F vero multiplicans G ipsum L faciat. Et quoniam C, D in eâdem sunt ratione, in quâ F, G, et ex ipsis C, D fit K,

A, 30. N, 60. O, 120. B, 240.
K, 6. M, 12. L, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

ex ipsis vero F, G fit L; erunt K, L similes plani numeri[m]: quare inter ipsos unus medius proportionalis cadit[n]. Sit is numerus M: ergo M fit ex D, F[o]. Est autem K ad M, ut M ad L. Et quoniam D ipsum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M; erit ut C ad F, ita K ad M[p]. Sed ut K ad M, ita M ad L: ergo K, M, L deinceps proportionales sunt in ratione C ad F. Et quoniam ut C ad D, ita F ad G; erit permutando ut C ad F, ita D ad G[q]. Rursus, quoniam ut D ad E, ita G ad H; et permutando erit ut D ad G, ita E ad H: ergo K, M, L deinceps proportionales sunt in ratione C ad F, et D ad G, et E ad H. Uterque autem ipsorum E, H multiplicans M faciat utrumque N, O. Et quoniam solidus est A, latera autem ipsius C, D, E; numerus E eum, qui fit ex C, D, multiplicans fecit A; qui vero fit ex C, D est K: ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eâdem ratione et H multiplicans L, qui fit ex F, G, fecit ipsum B. Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A, sed et multiplicans M fecit N; erit[o] ut K ad M, ita A ad N. Ut autem K ad M, ita C ad F, et D ad G, et adhuc E ad H: ergo ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita A ad N. Rursus, quoniam uterque ipsorum E, H multiplicans M fecit utrumque N, O; erit ut E ad H, ita N ad O. Sed ut E ad H, ita C ad F, et D ad G: est igitur ut C ad F, et D ad G, ita et A ad N, et N ad O. Rursus, quoniam H multiplicans M fecit ipsum O, sed et multiplicans L fecit B: erit ut M ad L, ita O ad B. Sed ut M ad L, ita C ad F, et D ad G, et E ad H; et igitur ut C ad F, et D ad G, et E ad H, ita non solum O ad B, sed et A ad N, et N ad O. Ergo A, N, O, B deinceps proportionales sunt in dictis laterum rationibus.

[m] Def. 21. sept.
[n] 18. hujus.
[o] Cor. 18. hujus.
[p] 17. sept.
[q] 13. sept.

Dico et A ad B triplicatam rationem habere ejus, quam

habet latus homologum ad homologum latus; hoc eſt, quam habet numerus C ad F, vel D ad G, vel E ad H. Quoniam enim quatuor numeri proportionales ſunt A, N, O, B; habebit A ad B triplicatam rationem ejus, quam habet A ad N [p]. Sed ut A ad N, ita oſtenſus eſt et C ad F, et D ad G, et E ad H. Ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt, quam C habet ad F, et D ad G, et E ad H. *Q. E. D.*

[p] Def. 11. quinti.

[XX.] PROP. XX. THEOR.

*Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri ſimiles plani erunt.*

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat C: dico numeros A, B ſimiles planos eſſe. Sumantur enim D, E minimi omnium eandem cum ipſis A, C, rationem habentium [q]: æqualiter igitur

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 8. | | C, 12. | B, 18. |
| D, 2. | E, 3. | F, 4. | G, 6. |

D ipſum A metitur, atque E ipſum C [r]. Et quoties D metitur A, tot unitates ſint in F; propterea que F multiplicans D ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit C [s]: quare A planus numerus eſt, cujus latera D, F [t]. Rurſus, quoniam D, E ſunt minimi omnium eandem cum C, B rationem habentium; D æqualiter ipſum C metitur, atque E ipſum B [r]. Quoties autem E ipſum B metitur, tot unitates ſint in G: quare G ipſum E multiplicans fecit B [s]: ideoque B numerus planus eſt, cujus latera E, G [t]: ergo numeri A, B ſunt plani. Dico et ſimiles eſſe. Quoniam enim uterque ipſorum F, G multiplicans E utrumque C, B fecit; ut F ad G, ita erit C ad B [u]. Ut autem C ad B, ita D ad E; et igitur ut D ad E, ita F ad G. Quare A, B ſimiles plani ſunt; cum ipſorum latera ſint proportionalia [x]. *Q. E. D.*

[q] 35. ſept.
[r] 21. ſept.
[s] Def. 15. ſept.
[t] Def. 16. ſept.
[u] 18. ſept.
[x] Def. 21. ſept.

PROP.

## PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

*Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri similes solidi erunt.*

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant C, D: dico ipsos A, B similes solidos esse.

Sumantur enim numeri tres, minimi trium omnium eandem cum A, C, D rationem habentium, qui sint E, F, G[x]: [x] 35. sept.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 24. | | C, 72. | D, 216. | | B, 648. |
| | E, 1. | F, 3. | | G, 9. | |
| H, 1. | K, 1. | N, 24. | L, 3. | M, 3. | O, 72. |

extremi igitur ipsorum E, G primi inter se sunt[y]. Et [y] 3. hujus. quoniam inter E, G unus medius proportionalis F cecidit; erunt numeri E, G similes plani[z]. Sint ipsius qui- [z] 20. hujus. dem E latera H, K, ipsius vero G latera homologa sint L, M. Manifestum igitur est ex antecedente E, F, G deinceps proportionales esse in ratione H ad L, et in ratione K ad M. Et quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam A, C, D rationem habentium; erit ex æquo ut E ad G, ita A ad D[a]. [a] 14. sept. Sunt autem E, G inter se primi: sed primi sunt et minimi[b]: [b] 23. sept. minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, major majorem et minor minorem[c]; hoc est, [c] 21. sept. antecedens antecedentem et consequens consequentem: ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. Quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N: ergo N ipsum E multiplicans fecit A. Sed E fit ex H, K: ac propterea N eum, qui fit ex H, K, multiplicans ipsum A fecit. Solidus igitur est A, cujus latera H, K, N. Rursus, quoniam E, F, G minimi sunt eandem quam ipsi C, D, B rationem habentium; E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. Et quoties G metitur B, tot unitates sint in O: ideoque O multiplicans G ipsum B fecit. At G fit ex L, M: ergo O eum, qui fit ex L, M, multiplicans fecit B. Solidus igitur est B, et ejus latera L, M, O. Quare A, B solidi sunt. Dico etiam eos similes esse. Quoniam enim A ad C ut C ad D, et C ad D ut D ad B; erit ex æquo ut A ad D, ita C ad B[a]. Sed E, G minimi sunt omnium in ratione numerorum A, D. (Nimirum cum inter se sint primi.) Minimi igitur in ratione numerorum C, B. Numeri igitur E, G numeros C, B æqua-

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 24. | | C, 72. | D, 216. | | B, 648. |
| | E, 1. | F, 3. | | G, 9. | |
| H, 1. | K, 1. | N, 24. | L, 3. | M, 3. | O, 72. |

liter metiuntur. Quoties vero G metitur B, tot sunt in O unitates[a]. Quoties igitur E metitur C, tot sunt in O unitates. Quapropter O multiplicans E ipsum C fecerit. Sed ostensum est N multiplicando E fecisse A. Quare N, O multiplicantes E ipsos A, C fecerunt[b]. Ut igitur N ad O, ita erit A ad C, hoc est, E ad F. Sed ut E ad F, ita H ad L, et K ad M; et igitur ut H ad L, ita K ad M, et N ad O. Sunt autem H, K, N latera ipsius A, et L, M, O latera ipsius B. Ergo A, B similes solidi erunt. *Q. E. D.*

[a] ex hyp.
[b] 17. sept.

[XXII.]

## PROP. XXII. THEOR.

*Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus; et tertius quadratus erit.*

Sint tres numeri deinceps proportionales A, B, C; sitque primus A quadratus: dico et tertium C quadratum esse.

Numeri quadrati A latus sit numerus D. Et numerus B sui multiplicatione numerum E faciat. Propter proportionem trium A, B, C continuam; illum E, ex secundo B factum, primus A metietur[c].

| | | |
|---|---|---|
| | E, 36. | |
| A, 4. | B, 6. | C, 9. |
| D, 2. | F, 3. | G, 9. |

Quadratus utique quadratum. Quare et D, qui latus est quadrati A, metietur B latus quadrati E[d]. Quoties igitur D metitur B, tot sint in F unitates. Numerus igitur D illum F multiplicans numerum B fecerit. Seipsum multiplicans numerus F faciat G. Jam cum numerus D seipsum multiplicans fecerit A, et illum F multiplicando fecerit B; erit A ad B ut D ad F[e]. Sed A ad B ut B ad C[f]. Quare B est ad C ut D ad F. Rursus cum numerus F illum D et seipsum multiplicans numeros B, G fecerit; erit B ad G ut D ad F[e]. Est igitur B ad G ut idem B ad C. Numeri igitur G, C inter se æquales: numerus autem G quadratus, ex F scilicet. Quadratus igitur C. *Q. E. D.*

[c] 1. Cor. 20. sept.
[d] 14. hujus.
[e] 17. sept.
[f] ex hyp.

PROP.

## PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

*Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit.*

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, C, D; et A sit cubus: dico et D cubum esse.

Si quatuor illi A, B, C, D minimi sunt quatuor suæ deinceps analogiæ, res patet ex Corollario 1°. Prop. ii. hujus Libri.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 8. | B, 12. | C, 18. | D, 27. |

Sed A, B, C, D non sint minimi quatuor suæ deinceps analogiæ. Inveniantur igitur minimi illi quatuor E, F, G, H [g], quorum extremi necessario cubi erunt.[g] Cuborum E, H sint K, L latera. Et cubi A latus sit M. [g] 2. hujus.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 64. | B, 96. | C, 144. | D, 216. |
| E, 8. | F, 12. | G, 18. | H, 27. |
| K, 2. | L, 3. | | |
| M, 4. | N, 6. | | |
| O, 16. | P, 24. | Q, 36. | |
| R, 64. | S, 96. | T, 144. | V, 216. |

Quatuor illorum E, F, G, H ac propterea et aliorum quatuor A, B, C, D, perpetua erit in ratione K ad L deinceps analogia (id enim ex constructione 2. hujus manifestum est.) Quatuor autem illi E, F, G, H, cum sint minimi quatuor suæ analogiæ, quatuor illos alios A, B, C, D, singuli singulos æqualiter metientur; antecedens antecedentem, consequens consequentem [h].[h] 21. sept. Numerus igitur E metietur numerum A; cubus cubum. Quare et K, latus cubi E, metietur M, latus cubi A [i].[i] 15. hujus. Quoties K metitur M, toties L metiatur N. Erit igitur M ad N ut K ad L. Jam M seipsum multiplicando faciat O. Idem autem M, multiplicando N, faciat P. Et N seipsum multiplicando faciat Q. Ita tres facti fuerint O, P, Q, quorum perpetua, in ratione M ad N, sive K ad L, analogia; et extremi O, Q quadrati sunt ex M, N. Rursum numerus M tres O, P, Q multiplicando faciat tres R, S, T; et numerus N numerum Q multiplicando faciat V. Ita quatuor facti fuerint R, S, T, V, quorum perpetua, in eâdem illâ numerorum K, L, ratione, ana-

logia: extremi autem R, V cubi ſunt ex M, N. Cum vero quatuor A, B, C, D, atque quatuor R, S, T, V, ordine ſumpti in eâdem ſint ratione, ex æquo erit A ad D
[k] 14. ſept. ut R ad V [k]. Et permutando A ad R ut D ad V [l]. Sed
[l] 13. ſept. æquales inter ſe ſunt A, R; nempe cum uterque cubus ſit ex M. Quare et D, V inter ſe æquales. Cubus autem V, nempe ex N. Quare et D cubus. *Q. E. D.*

[XXIV.]

## PROP. XXIV. THEOR.

*Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, et ſecundus quadratus erit.*

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D; ſitque A quadratus: dico et B quadratum eſſe.

Quoniam enim C, D quadrati ſunt, erunt C, D ſimiles plani: ideoque inter ipſos C, D unus
[m] 18. hujus. medius proportionalis cadit [m]. Eſt autem ut C ad D, ita A ad B: quare etiam inter A, B cadit unus medius propor-
[n] 8. hujus. tionalis [n]. Eſtque A quadratus. Ergo et B quadratus
[o] 22. hujus. erit [o]. *Q. E. D.*

| | |
|---|---|
| A, 4. | B, 9. |
| C, 16. | D, 36. |

[XXV.]

## PROP. XXV. THEOR.

*Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum; primus autem ſit cubus, et ſecundus cubus erit.*

Duo enim numeri A, B inter ſe rationem habeant, quam cubus numerus C ad numerum cubum D; ſitque A cubus: dico et B cubum eſſe.

Quoniam enim C, D cubi ſunt, erunt C, D ſimiles ſolidi: idcirco inter ipſos duo medii proportionales

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 8. | E, 12. | F, 18. | B, 27. |
| C, 64. | | | D, 216. |

[p] 19. hujus. cadent [p]. Quot autem inter C, D cadunt medii proportionales, totidem cadent et inter eos, qui eandem quam
[q] 8. hujus. ipſi rationem habent [q]: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. Cadant E, F. Quoniam igitur quatuor numeri A, E, F, B deinceps proportionales ſunt, eſtque
[r] 23. hujus. A cubus; et B cubus erit [r]. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

*Similes plani numeri inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.*

Sint similes plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B similes plani sunt, inter eos cadit unus medius proportionalis[s]. Cadat, sitque C; et sumantur minimi numeri eandem quam A, C, B rationem habentium sc. D, E, F[t]: ergo ipsorum extremi D, F quadrati sunt[u]. Et quoniam est ut D ad F, ita A ad B, et sunt D, F quadrati; habebit A ad B rationem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. *Q. E. D.*

| | | |
|---|---|---|
| A, 6. | C, 12. | B, 24. |
| D, 1. | E, 2. | F, 4. |

[s] 18. hujus.
[t] 35. sept.
[u] Cor. 1. 2. hujus.

## PROP. XXVII. THEOR. [XXVII.]

*Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.*

Sint similes solidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B similes solidi sunt, inter ipsos duo medii proportionales cadent[x]. Cadant C, D; et sumantur minimi numeri, qui eandem quam A, C, D, B

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 16. | C, 24. | D, 36. | B, 54. |
| E, 8. | F, 12. | G, 18. | H, 27. |

rationem habeant, ipsis multitudine æquales E, F, G, H[y]: ergo eorum extremi E, H cubi sunt[z]. Atque est ut E ad H, ita A ad B. Habet igitur A ad B rationem, quam numerus cubus ad cubum numerum. *Q. E. D.*

[x] 19. hujus.
[y] 2. hujus.
[z] Cor. 1. 2. hujus.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

# ELEMENTORUM

# LIBER NONUS.

## PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

*Si duo ſimiles plani numeri ſeſe multiplicantes aliquem ſecerint, factus quadratus erit.*

SINT duo ſimiles plani numeri A, B; et A ipſum B multiplicans faciat C: dico C quadratum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat D: ergo D quadratus eſt. Quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipſum C fecit; ut A ad B, ita erit D ad C[a]. Et quoniam A, B ſimiles plani ſunt; inter ipſos unus medius proportionalis cadet[b]. Si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipſos cadunt, totidem cadent et inter eos, qui eandem habent rationem[c]: quare et inter D, C unus medius proportionalis cadit. Atque eſt D quadratus. Ergo et C quadratus erit[d]. *Q. E. D.*

| | |
|---|---|
| A, 6. | B, 54. |
| D, 36. | C, 324. |

a 17. ſept.
b 18. octavi.
c 8. octavi.
d 22. octavi.

Aliter *. Sint ſimiles plani numeri A, B; et numerus A, numerum B multiplicans, faciat C. Dico numerum C quadratum eſſe. Numeri A, B, cum ſint ſimiles plani, unum capiunt proportione medium[b].

| | | |
|---|---|---|
| A, 6. | D, 18. | B, 54. |
| | C, 324. | |
| | E, 324. | |

Eſto

Esto medius ille D; et D seipsum multiplicans faciat E. Propter continuam trium A, D, B analogiam, E factus e medio facto ex extremis, C, æqualis erit. Quadratus autem E. Quare et C quadratus. *Q. E. D.*

*Cor.* * Numeri quadrati se mutuo multiplicantes quadratum facient; qui æqualis erit quadrato numeri plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

Quadratus A multiplicet quadratum B, et faciat C. Quadratorum A, B latera sint E, F. Numeri E, F se mutuo multiplicantes faciant G. G seipsum multiplicans faciat H. Dico quadratum esse C, et quadrato H æqualem.

| | | |
|---|---|---|
| A, 4. | G, 14. | B, 49. |
| | C, 196. | |
| E, 2. | | F, 7. |
| | H, 196. | |

Et quadratum esse C, id quidem hâc ipsâ ex propositione manifestum est. Dico præterea ipsi H æqualem esse. Cum enim numeri E, F quadratorum A, B sint latera; numerus G, mutuâ laterum E, F multiplicatione factus, inter ipsos A, B proportione medius est[e]. Et cum perpetua sit trium A, G, B proportio; factus ex extremis A, B facto ex medio G æqualis erit. Sed ex extremis A, B factus est C; et ex medio G factus est H. Quare C æqualis est ipsi H. *Q. E. D.*

[e] Cor.* 11. octavi.

SCHOLION. *

Numeris igitur duobus literis *a*, *b* designatis, et plano ex illis facto notis *a b* designato, quadratum ex *a b* factum notis $a^2$, $b^2$, rite exprimit Algebra.

[II.]

## PROP. II. THEOR.

*Si duo numeri sese multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.*

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes quadratum numerum C efficiant: dico A, B similes planos esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo D quadratus est. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B, ita erit D ad C[f]. Et quoniam D quadratus est, sed et C etiam; erunt D, C similes plani: quare inter D, C

| | |
|---|---|
| A, 3. | B, 12. |
| D, 9. | C, 36. |

[f] 17. sept.

D, C unus medius proportionalis cadit[g]. Atque est ut D ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B cadet unus medius proportionalis[h]. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadat, erunt similes plani[i]. Ergo A, B similes plani sunt. *Q. E. D.*

g 18. octavi. h 8. octavi. i 20. octavi.

## PROP. III. THEOR. [III.]

*Si cubus numerus seipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.*

Cubus enim numerus A seipsum multiplicans faciat B: dico B cubum esse.

Sumatur enim ipsius A latus C, et C seipsum multiplicans faciat D: manifestum igitur est C multiplicantem D facere ipsum A[k]. Et quoniam C seipsum multiplicans fecit D; metitur C ipsum D per eas, quæ in ipso C sunt, unitates[l]. Sed et unitas metitur C per eas, quæ in ipso C sunt, unitates: est igitur ut unitas ad C, ita C ad D[m]. Rursus, quoniam C multiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per unitates, quæ sunt in C. Metitur autem et unitas ipsum C per unitates, quæ in ipso sunt: ergo ut unitas ad C, ita D ad A. Sed ut unitas ad C, ita C ad D: ut igitur unitas ad C, ita C ad D, et D ad A: ideoque inter unitatem et numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt C, D. Rursus, quoniam A seipsum multiplicans fecit B, et A ipsum B metitur per eas, quæ in ipso A sunt, unitates[l]. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates, quæ sunt in ipso: est igitur ut unitas ad A, ita A ad B[m]. Sed inter unitatem et A cadunt duo medii proportionales: ergo et inter A et B duo medii proportionales cadent[n]. Quod si inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem sit cubus; et quartus cubus erit[o]. Atque est A cubus. Ergo et B cubus erit. *Q. E. D.*

A, 8.
D, 4.
C, 2.
B, 64.
1.

k Def. 19. septimi. l Def. 15. septimi. m Def. 20. septimi. n 8. octavi. o 23. octavi.

## PROP. IV. THEOR. [IV.]

*Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.*

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum C faciat: dico C cubum esse.

Numerus

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[o] 3. hujus. D cubus est [o]. Et quoniam A seipsum multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit: ut A ad B, ita
[p] 17. sept. erit D ad C [p]. Et quoniam A, B cubi sunt, erunt similes solidi numeri: ac propterea inter
[q] 19. octavi. A, B cadent duo medii proportionales [q]: quare et inter
[r] 8. octavi. D, C duo medii proportionales cadent [r]. Estque D cubus.
[s] 23. octavi. ergo et C cubus erit [s]. *Q. E. D.*

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

*Cor.* * Cubus, cuborum multiplicatione factus, cubus erit plani ex lateribus numerorum principio positorum facti.

SCHOLION. *

Literis igitur *a*, *b* numeros duos significantibus, cubum ex numero plano *a b*, notis $a^3 b^3$, rite exprimit Algebra. Et progressio infinita est.

[V.] PROP. V. THEOR.

*Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, et multiplicatus cubus erit.*

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum C: dico B cubum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat D: ergo
[t] 3. hujus. D cubus est [t]. Et quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; ut A ad B,
[u] 17. sept. ita erit D ad C [u]. Et quoniam D, C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos
[x] 19. octavi. cadunt duo medii proportionales [x]. Atque est ut D ad C, ita A ad B: ergo et inter A, B duo medii proportionales
[y] 8. octavi. cadent [y]. Estque A cubus. Ergo et B cubus erit [z].
[z] 23. octavi. *Q. E. D.*

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit.*

Numerus enim A seipsum multiplicans cubum B faciat: dico et A cubum esse.

Numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B
[a] Def. 19. sept. ipsum C fecit, erit C cubus [a]. Et quoniam A seipsum

A, 8. B, 64. C, 512.

quidem

quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit C, ut A ad B, ita erit B ad C [b]. Et quoniam B, C cubi funt, fimiles folidi erunt: ideoque inter B, C duo medii proportionales cadunt [c]. Et eft ut B ad C, ita A ad B: quare et inter A, B duo medii proportionales cadunt [d]. Atque eft B cubus. Ergo et A cubus erit [e]. *Q. E. D.*

[b] 17. fept. [c] 19. octavi. [d] 8. octavi. [e] 23. octavi.

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si compofitus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus folidus erit.*

Compofitus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipfum C faciat: dico C folidum effe.

Quoniam enim A compofitus eft, eum numerus aliquis metietur [f]. Metiatur D. Et quoties D ipfum A

[f] Def. 13. fept.

A, 6. B, 7. C, 42.
D, 3. E, 2.

metitur, tot unitates fint in E: ergo E multiplicans D fecit A. Et quoniam A ipfum B multiplicans fecit C; eftque A, qui fit ex D, E; numerus, qui fit ex D, E, ipfum B multiplicans fecit C: ergo B multiplicans eum, qui fit ex D, E, ipfum C fecit [g]. Ac propterea C folidus eft, cujus latera D, E, B [h]. *Q. E. D.*

[g] 16. fept. [h] Def. 17. fept.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus eft, et unum intermittentes omnes; quartus autem eft cubus, et duos intermittentes omnes; feptimus vero cubus fimul et quadratus, et quinque intermittentes omnes.*

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F: dico tertium quidem ab unitate fc. B quadratum effe, et unum intermittentes omnes; quartum autem C cubum, et duos intermittentes omnes; feptimum vero F cubum fimul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A, ita A ad B; unitas æqualiter metitur numerum A, atque A ipfum B [l]. Sed

[l] Def. 20. fept.

I. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729.

unitas metitur A per unitates, quæ in ipfo funt: ergo et

1. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F. 729.

et A ipsum B per unitates, quæ sunt in A, metitur: quare A seipsum multiplicans fecit B; quadratus igitur est B. Et quoniam B, C, D deinceps proportionales sunt, estque B quadratus; et D quadratus erit [k]. Eâdem ratione erit et F quadratus. Similiter demonstrabimus et unum intermittentes omnes quadratos esse. Dico et quartum ab unitate, videlicet C, esse cubum, et duos intermittentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita B ad C; unitas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum C [l]. Sed unitas numerum A metitur per unitates, quæ in A sunt: ergo et B metitur C per unitates, quæ sunt in A; et ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit C; erit C cubus [m]. Quod cum C, D, E, F deinceps proportionales sint, sitque C cubus, et F cubus erit [n]. Ostensum autem est quadratum esse: septimus igitur ab unitate F et cubus est et quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes et cubos et quadratos esse. Q. E. D.

[k] 22. octavi.
[l] Def. 20. sept.
[m] Def. 19. sept.
[n] 23. octavi.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem sit quadratus; et reliqui omnes quadrati erunt. Si post unitatem sit cubus; et reliqui omnes cubi erunt.*

Sint ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem A sit quadratus: dico et reliquos omnes quadratos esse.

Tertium quidem ab unitate B esse quadratum, et unum intermittentes omnes, demonstratum jam est [o].

[o] 8. hujus.

1. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Sunt igitur B, D, F &c. quadrati. Dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim A, B, C deinceps sunt proportionales, estque A quadratus; et C quadratus erit [p]. Rursus, quoniam C, D, E deinceps proportionales sunt; est autem C quadratus; et E quadratus erit. Similiter ostendemus et reliquos omnes quadratos esse.

[p] 22. octavi.

Sit autem A cubus: dico et reliquos cubos esse.

Quartum quidem ab unitate C esse cubum, et duos intermittentes omnes, jam demonstratum est [o]. Sunt igitur

igitur C, F &c. cubi. Dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A, ita A ad B, unitas numerum A æqualiter metitur, atque A ipsum B[p]. [p] Def. 20. sept.

I. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096 E, 32768. F, 262144.

Ergo A seipsum multiplicans fecit B[q]. Atqui est A [q] Def. 15. cubus. Si autem cubus numerus seipsum multiplicans sept. fecerit aliquem, factus cubus erit[r]; ergo B est cubus. [r] 3. hujus. Et quoniam quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales sunt, estque A cubus; et D cubus erit[s]. [s] 23. octavi. Eâdem ratione et E est cubus, et similiter reliqui omnes cubi sunt. *Q. E. D.* [X.]

## PROP. X. THEOR.

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Si qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.*

Sint ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, C, D, E, F, et qui post unitatem ipse A non sit quadratus: dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit C quadratus. Est autem et B quadratus[t]: ergo B, C inter se rationem habent, quam[t] 8. hujus.

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

numerus quadratus ad quadratum numerum. Atque est ut B ad C, ita A ad B: habent igitur A, B inter se rationem eam, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque A, B similes plani sunt[u]. Et est B [u] Def. 21. septimi. quadratus: ergo et A quadratus est, quod est contra hypothesin. Non igitur C quadratus erit. Similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate, et unum intermittentes omnes.

Sed non sit A cubus. Dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, et duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit D cubus. Est autem et cubus C, quartus enim est ab unitate[x]; et ut C ad D, ita est[x] 8. hujus. B ad C: ergo et B ad C rationem habet, quam cubus ad

 cubum;

1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64.

[x] Def. 21. sept. cubum; ac propterea B, C similes solidi sunt [x]. Atque est C cubus; ergo et B cubus erit. Et quoniam est ut unitas ad numerum A, ita A ad B; A æqualiter metietur
[y] Def. 20. sept. B, atque unitas ipsum A [y]. Quare A seipsum multipli-
[z] Def. 15. sept. cans cubum B fecit [z]. Si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, et ipse cubus erit [a]: cubus igitur
[a] 6. hujus. est A, cujus ponitur contrarium Ergo neque D est cubus. Similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes. *Q. E. D.*

## [XI.] PROP. XI. THEOR.

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; minor majorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.*

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F. Dico horum B, C, D, E, F

A, 1. B, 3. C, 9. D, 27. E, 81. F, 243.

quemvis D majorem quemvis in serie, puta F, metiri, per aliquem eorum, qui sunt in serie. Sit enim C numerus ille unus in proportionalium serie, quem inter et unitatem tot in serie intercedunt medii, quot inter D et F. Et propter continuam numerorum analogiam, erit
[b] 14. sept. ex æquali A unitas ad C ut D ad F [b]. Quare numerus D metitur F per ipsum C. *Q. E. D.*

## [XII.] PROP. XII. THEOR.

*Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem et eum, qui unitati proximus est, metientur.*

Sint ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, C, D: dico quicunque primorum numerorum metiuntur D, eosdem et ipsum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D: dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A. Atqui E est primus; omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus
[c] 31. sept. est [c]: ergo E, A numeri inter se primi sunt. Et cum E metitur ipsum D, metiatur per unitates, quæ sunt in F: ergo

ergo E multiplicans F ipsum D fecit. Rursus, quoniam C metitur ipsum D per eas, quæ sunt in A unitates [d]; A multiplicans C ipsum D fecit. Sed et E multiplicans F [d] 11. hujus.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. | A, 4. | B, 16. | C, 64. | D, 256. |
| | E, 2. | H, 8. | G, 32. | F, 128. |

fecit D: qui igitur fit ex A, C ei, qui fit ex E, F, est æqualis: ergo ut A ad E, ita F ad C [e]. Suntque A, E primi; primi autem, et minimi [f]; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem [g]: metitur igitur E ipsum C. Metiatur per G: ergo E ipsum G multiplicans fecit C. Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis est ei, qui ex E, G: ergo ut A ad E, ita G ad B. Et sunt A, E primi, sed primi etiam et minimi [f], minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem [g]: quare et E ipsum B metitur. Metiatur per H: multiplicans igitur E ipsum H fecit B. Sed et A seipsum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex H, E est æqualis ei, qui fit ab ipso A: est igitur ut E ad A, ita A ad H [h]. Suntque A, E primi, sed primi etiam et minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos, qui eandem quam ipsi rationem habent, major majorem et minor minorem, hoc est, antecedens antecedentem et consequens consequentem [g]: ergo E metitur ipsum A, quem ponebatur non metiri. Non igitur A, E sunt inter se primi: ergo compositi erunt. Compositos vero primus aliquis numerus metitur [l]: quare ipsos A, E metietur aliquis numerus primus. Et quoniam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus præter seipsum [k]: metitur igitur E ipsos A, E: ideoque E ipsum A metitur. Similiter demonstrabimus quicunque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem et ipsum A metiri. *Q. E. D.*

[e] 19. sept.
[f] 23. sept.
[g] 21. sept.
[h] 20. sept.
[l] Def. 14. sept.
[k] Def. 11. sept.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem primus sit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui sunt in numeris proportionalibus.*

Sint quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, C, D; et qui post unitatem, videlicet A, sit primus: dico maximum D nullum alium metiri, præter ipsos A, B, C.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, et non sit E idem qui aliquis ipsorum A, B, C: manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, et metiatur D;

I. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E----- H---- G----- F-------

l 12. hujus. ipsum quoque A metietur primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: non igitur E primus est; ergo compositus: omnem autem compositum
m 33. sept. numerum primus aliquis numerus metitur[m]. Dico nullum alium primum metiri ipsum E, præterquam A. Si enim alius metitur E, et E metitur D, et alius ille ipsum D metietur: quare et ipsum A primum existentem[l], cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. Dico non esse F eundem cum aliquo ipsorum A, B, C. Si enim est idem, metiturque ipsum D per E; et unus ipsorum A, B, C ipsum D per E metietur. Sed quilibet ipsorum A, B, C metitur D
n 11. hujus. per aliquem ipsorum A, B, C[n]: quare et E idem erit qui unus ipsorum A, B, C. Similiter ostendetur F non esse primum, et A metiri F. Et quoniam E metitur D per F; et E multiplicans F ipsum D fecit. Sed
o ex hyp. et A multiplicans C fecit D[o]: qui igitur fit ex A, C est
p 19. sept. æqualis ei, qui ex E, F: ergo ut A ad E, ita est F ad C[p].
q Def. 20. sept. Sed A metitur E: quare et F ipsum C metitur[q]. Metiatur per G. Similiter demonstrabimus G non esse eundem qui unus ipsorum A, B, et A ipsum G metiri. Et quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicans F ipsum G fecit C. Sed et A multiplicans B ipsum C fecit: ergo qui fit ex A, B ei, qui ex F, G, est æqualis: ut igitur A ad F, ita est G ad B. Metitur autem A ipsum F: ergo et G ipsum B metietur. Metiatur per H. Similiter demon-

demonstrabimus H non esse eundem qui A. Et quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. Sed et A, seipsum multiplicans fecit B [r]: qui igitur fit ex H, G est æqualis quadrato, qui ex A. Ergo ut H ad A, ita A ad G [s]. Metitur autem A ipsum G; quare et H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem qui A; quod est absurdum. Non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A, B, C. *Q. E. D.*

[r] ex hyp. [s] 20. sept.

## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

Si *minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius primus numerus metietur ipsum, præter eos qui a principio metiebantur.*

Minimum enim numerum A primi numeri B, C, D metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A, præter ipsos B, C, D.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; et non sit E idem qui aliquis ipsorum B, C, D. Et quoniam E metitur A, ipsum per F metiatur. Ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B, C, D. Si autem duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant, et factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, et unum eorum qui a principio positi sunt metietur [t]. Ergo numeri B, C, D metientur unum ipsorum E, F. Ipsum quidem E non metientur, etenim E primus est [u]; et non idem qui aliquis ipsorum B, C, D. Ergo metientur ipsum F, qui est minor quam A, quod fieri non potest; ponitur enim A minimus eorum, quos B, C, D metiantur. Non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B, C, D. *Q. E. D.*

A, 30.
B, 2. C, 3. D, 5.
E ----- F -------

[t] 32. sept. [u] ex hyp.

## PROP. XV. THEOR. [XV.]

*Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.*

Sint A, B, C tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A, B ad C, et B, C ad A, et A, C ad B.

 Sumantur

Sumantur enim duo minimi numeri, eandem cum ipſis A, B, C rationem habentes, DE, EF. Manifeſtum eſt DE ſeipſum quidem multiplicantem facere A[x]; multiplicantem vero EF facere B, et EF ſeipſum multiplicantem facere C. Et quoniam DE, EF, minimi ſunt; primi erunt inter ſe[y]. Si autem duo numeri primi inter ſe fuerint, et uterque ſimul ad utrumque primus erit[z]. Ergo DF ad utrumque ipſorum DE, EF primus eſt. Sed et DE ad EF eſt primus. Quare DF, DE ad EF primi ſunt. Ac propterea qui fit ex FD, DE, primus eſt ad EF[a]. Si autem duo numeri primi inter ſe fuerint; qui fit ex uno ipſorum ad reliquum primus erit[b]. Ergo qui fit ex FD, DE ad eum, qui fit ex EF, eſt primus. Sed † qui ex FD, DE eſt is, qui fit ex DE, una cum eo, qui ex DE, EF[c]. Qui igitur ex DE, una cum eo, qui ex DE, EF, primus eſt ad eum, qui ex EF. Sed qui fit ex DE eſt A; qui vero ex DE, EF eſt B, et qui ex EF eſt C. Ergo A, B compoſiti ad ipſum C primi ſunt. Similiter oſtendemus et B, C, ad A eſſe primos. Dico et A, C ad B primos eſſe. Quoniam enim DF, ad utrumque ipſorum DE, EF eſt primus[z]; et qui fit ex DF ad eum, qui ex DE, EF, primus erit[d]. Sed ei, qui fit ex DF, æquales ſunt qui ex DE et EF fiunt, una cum eo, qui bis ſit ex DE, EF[e]. Qui igitur ex DE et EF fiunt, una cum eo, qui bis ex DE, EF, primi ſunt ad eum, qui ex DE, EF. Ergo et dividendo, qui fiunt ex DE et EF, una cum eo, qui ſemel fit ex DE, EF, primi ſunt ad eum, qui ex DE, EF; et rurſus dividendo, qui fiunt ex DE et EF, ad eum, qui fit ex DE, EF, primi ſunt. Sed qui fit ex DE, eſt A; qui vero ex DE, EF, eſt B; et qui ex EF, eſt C. Ergo A, C compoſiti ad ipſum B primi erunt. *Q. E. D.*

| | | |
|---|---|---|
| A, 9. | B, 12. | C, 16. |
| D . . . E . . . . F. | | |

[x] 2. octavi.
[y] 24. ſept.
[z] 30. ſept.
[a] 26. ſept.
[b] 27. ſept.
[c] 3. ſecundi.
[d] 26. & 27. ſept.
[e] 4. ſecundi.

† *Hoc ex eis eſt, quæ ab Euclide in rectangulis oſtenſa ſunt ſub partibus lineæ rectæ comprehenſis in Libro ii; a nobis autem in numeris planis ex partibus numeri factis in Scholio noſtro ad viceſimam ſeptimi, et ejuſce Scholii corollario. Hic igitur et in ſequentibus, Propoſitiones Libri ii. de rectangulis, in numerorum materiâ, quando opus ſit, laudamus, ac ſi de numeris planis pronuntiatæ eſſent.*

PROP.

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si duo numeri primi inter se fuerint; non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium ullum.*

Duo enim numeri A, B primi inter se sint: dico non esse ut A ad B, ita B ad alium ullum.

Si enim fieri potest, sit ut A ad B, ita B ad C. Et sunt A, B primi; primi vero sunt et minimi[e]; minimi vero eos, qui eandem habent rationem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Metitur igitur A ipsum B, ut antecedens antecedentem[f]. Sed et ipse seipsum metitur. Ergo A metitur ipsos A, B primos inter se existentes; quod est absurdum. Non igitur est ut A ad B, ita B ad C. *Q. E. D.*

A, 5. B, 8. C------

e 23. sept.

f 21. sept.

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium ullum.*

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, extremi autem ipsorum A, D primi sint inter se: dico non esse ut A ad B, ita D ad alium ullum.

Si enim fieri potest, sit ut A ad B, ita D ad E. Quare permutando ut A ad D, ita erit B ad E[g]. Et etiam sunt A, D primi[h]; primi etiam et minimi[i]; minimi vero

g 13. sept.
h ex hyp.
i 23. sept.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E-------

eos, qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem[k]. Metitur igitur A ipsum B. Atque est ut A ad B, ita B ad C. Ergo et B metitur ipsum C, et ob id A quoque ipsum C metitur. Et quoniam est ut B ad C, ita C ad D, metitur autem B ipsum C; et C ipsum D metitur. Sed A metitur C; quare et A metitur ipsum D. Metitur autem et seipsum. Ergo A ipsos A, D primos inter se existentes metitur; quod fieri non potest. Non igitur erit ut A ad B, ita D ad alium ullum. *Q. E. D.*

k 21. sept.

[XVIII.] PROP. XVIII. PROBL.

*Duobus numeris datis considerare, an tertius ipsis proportionalis invenire possit. Vide 2. Cor. * 20. septimi.*

[XIX.] PROP. XIX. PROBL.

*Tribus numeris datis considerare, an quartus ipsis proportionalis inveniri possit. Vide 2. Cor. * 19. septimi.*

[XX.] PROP. XX. THEOR.

*Primi numeri plures sunt omni propositâ multitudine primorum numerorum.*

Sint propositi primi numeri A, B, C: dico ipsis A, B, C plures esse primos numeros.

Sumatur enim minimus, quem ipsi A, B, C metiantur[l], sitque DE; et ipsi DE apponatur unitas DF. Ergo EF, vel primus est, vel non. Sit primum primus: inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, EF plures quam ipsi A, B, C.

[l] 38. sept.

A, 2. B, 3. C, 5.

30.

E————D . F.

Sed non sit EF primus. Ergo eum primus metitur[m]. Metiatur G: dico G nulli ipsorum A, B, C eundem esse. Si enim G idem sit qui unus ipsorum A, B, C, ipsi autem A, B, C metiantur DE; et G ipsum DE metietur. Metitur autem et EF; et reliquam igitur DF unitatem metietur G numerus existens, quod est absurdum. Ergo G non est idem qui unus ipsorum A, B, C. Et ponitur primus. Inventi igitur sunt primi numeri A, B, C, G plures propositâ multitudine primorum numerorum A, B, C. *Q. E. D.*

[m] 33. sept.

A, 2. B, 3. C, 7.

105.

E————D . F.

G, 53.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

*Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.*

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, BC, CD, DE: dico totum AE, parem esse.

Cum enim numeri AB, BC seorsim pares sint; numerus binarius utrumque metitur[n]. Compositum igitur AC metietur. Metitur autem CD, parem scilicet. Compositum

[n] Def. 6. sept.

Compositum igitur A D metietur. Metitur autem D E,

A . . . . B . . . . . . C . . . . . . . . D . . . . . . . . . . E

parem. Compositum igitur A E. Par igitur est numerus A E. *Q. E. D.*

*Cor.* * Qui imparem metitur numerus impar erit.

## PROP. XXII. THEOR. [XXII.]

*Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.*

Componantur enim impares numeri quotcunque, multitudine pares, A B, B C, C D, D E: dico totum A E parem esse.

CAS. 1. Componantur primum duo numeri impares A B, B C. Ab A B auferatur unitas B F, et a B C auferatur unitas B G. Numerus A F erit par, necnon G C.

A . . F . B . G . . . . C . . . . . . . D . . . . . . . . . E

Cæterum F G par, ipse scilicet binarius. Totus igitur A C par, ex tribus utique paribus A F, F G, G C compositus [o]. [o] 21. hujus.

CAS. 2. Componantur vero numeri impares quotcunque, multitudine tantum pares, A B, B C, C D, D E. Dico totum A E parem. Bini enim A B, B C compositi parem conficiunt A C [p]. Similiter bini C D, D E parem conficiunt C E. Pares vero A C, C E parem conficiunt A E [q]. Et quotcunque fuerint numeri A B, B C, C D, D E, modo eorum multitudo sit par, totus A E in binos resolvetur. Quilibet vero bini simul sumpti conficiunt parem [p]. Quotlibet igitur e binis quisque compositi, simul sumpti, conficiunt parem [q]. Totus igitur A E par. *Q. E. D.*

[p] Per cas. 1.
[q] 21. hujus.

## PROP. XXIII. THEOR. [XXIII.]

*Si impares numeri quotcunque componantur, et multitudo ipsorum sit impar; et totus impar erit.*

Componantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo sit impar, A B, B C, C D: dico et totum A D imparem esse.

Auferatur ab ipso C D unitas D E: reliquus igitur C E

A . . . . B . . . . . . C . . . . . . . . E . D

par est [r]. Est autem et A C par [s]. Ergo et totus A E par

[r] Def. 7. sept.
[s] 22. hujus.

[t] 21. hujus. par erit [t]. Atque eſt D E unitas. Impar igitur eſt A D. Q. E. D.

[XXIV.] PROP. XXIV. THEOR.

*Si a pari numero par auferatur, et reliquus par erit.*

A pari enim numero A B par auferatur B C: dico et reliquum C A parem eſſe.

Quoniam A B par eſt, binarius metietur A B. Sed et [u] Per hyp. C B, parem ſcilicet [u]. Quare et reliquum A C. Par igitur eſt A C. Q. E. D.

A . . . . . . C . . . . B

[XXV.] PROP. XXV. THEOR.

*Si a pari numero impar auferatur, et reliquus impar erit.*

A pari enim numero A B impar B C auferatur: dico et reliquum C A imparem eſſe.

[x] Def. 7. ſept. Auferatur ab ipſo B C unitas C D. Ergo D B par eſt [x]. Eſt autem par et A B. Et [y] 24. hujus. reliquus igitur A D eſt par [y]. Atque eſt C D unitas. Ergo C A impar eſt. Q. E. D.

A . . . . . . . C . D . . . . B

[XXVI.] PROP. XXVI. THEOR.

*Si ab impari numero impar auferatur, et reliquus par erit.*

Ab impari enim numero A B impar B C auferatur: dico reliquum C A parem eſſe.

Quoniam enim A B impar eſt, auferatur unitas B D: reliquus A D igitur eſt par. Eâdem ratione et C D eſt par. Quare et reliquus A C [z] 24. hujus. par eſt [z]. Q. E. D.

A . . . . C . . . . . . D . B

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

*Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.*

Ab impari enim numero A B par auferatur B C: dico reliquum C A imparem eſſe.

Auferatur enim unitas A D. Ergo D B par eſt. Eſt autem par et B C. Et reliquus [a] 24. hujus. igitur C D eſt par [a]. Atque eſt D A unitas. Ergo C A impar [b] Def. 7. ſept. eſt [b]. Q. E. D.

A . D . . . . C . . . . B

PROP.

## PROP. XXVIII. THEOR. [XXVIII.]

*Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.*

Impar enim numerus A, parem numerum B multiplicans, faciat C: dico C parem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot unitates sunt in A. Atque est B par. Ergo C ex paribus numeris componitur. Si autem pares numeri quotcunque componantur, totus par erit [c]. Ergo C est par. *Q. E. D.*

A . . .     B . . . .
C . . . . . . . . . . . .

[c] 21. hujus.

## PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

*Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.*

Impar enim numerus A, numerum imparem B multiplicans, faciat C; dico C imparem esse.

Quoniam enim A, multiplicans B, ipsum C fecit; componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar. Ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. Qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, et ipse impar erit [d]. Ergo C est impar. *Q. E. D.*

A . . .     B . . . . .
C . . . . . . . . . . . . . . .

[d] 23. hujus.

## PROP. XXX. THEOR. [XXX.]

*Si impar numerus parem numerum metiatur, et dimidium ejus metietur.*

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C: dico C non esse imparem. Nam si fieri potest, sit impar.

A . . .     B . . . . . . . . . . . .
C . . . .
D .'.     E . . . . . .

Et quoniam A ipsum B metitur per C; impar ille A, multiplicans ipsum C imparem, fecit B. Ac propterea impar

A . . . B . . . . . . . . . . . .
C . . . .
D . . E . . . . . .

[c 29. hujus.] impar est B[c]; quod est absurdum, par enim ponitur. Non igitur C est impar. Ergo par. Paris igitur C sit D dimidius. Impar autem A, numerum D multiplicans, faciat E. A igitur metietur E, ex A et D factum. Sed cum numerus A, numeros C, D multiplicans, fecerit
[d 17. sept.] B, E; erit B ad E ut C ad D[d]. Sed D dimidius est ipsius C. Quare et E ipsius B dimidius. Numerus igitur A, numerum E metiendo, dimidium ipsius B metitur. *Q. E. D.*

[XXXI.] PROP. XXXI. THEOR.

*Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, et ad ipsius duplum primus erit.*

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, et sit C ipsius B duplus: dico A etiam ad C primum esse.

Si enim non sint A, C primi, eos aliquis numerus metietur. Metiatur, sitque D. Et est A impar. Impar igitur est
[e Cor. 21. hujus.] et D[e]. Et quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; et D ipsius C dimi-
[f 30. hujus.] dium metietur[f]. Sed ipsius C dimidium est B. Ergo D ipsum B metitur. Metitur autem et ipsum A. Quare D ipsos A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest. Numeros igitur A, C nullus quidem D metitur. Ergo A, C inter se primi sunt. *Q. E. D.*

A . . . B . . . . .
C . . . . . . . . . .
D ------

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

*Numerorum a binario duplatorum unusquisque pariter par est tantum.*

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, C, D: dico B, C, D pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum B, C, D pariter parem
[g Def. 8. sept.] esse manifesto constat[g]: a binario namque duplatus est.

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales

E, 1. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

tionales sunt, et post unitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum A, B, C, D, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos A, B, C [h]. Atque est unusquisque ipsorum A, B, C par. Ergo D pariter par est tantum. Similiter demonstrabimus et unumquemque ipsorum A, B, C pariter parem esse tantum. *Q. E. D.* [h] 13. hujus.

## PROP. XXXIII. THEOR. [XXXIII.]

*Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.*

Numerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem esse tantum.

At vero pariter imparem esse perspicuum est [i]: dimidius enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico et tantum. Metiatur enim, si fieri possit, par numerus B numerum A (cujus dimidius est impar) pari C. Pa- [i] Def. 9. sept.

B -------
A . . . . . . . . . .
C -------
D ---- E ---------

ris C sit D dimidius. Et B multiplicans D faciat E. Jam cum numerus B numeros C, D multiplicans faciat A, E; erit A ad E, ut C ad D [k]. Sed D dimidius est illius C. Ergo et E ipsius A dimidius. Sed E factus est ex D et numero pari B. Par igitur est E [l]. Numerus igitur A dimidium parem habet. Quod hypothesi repugnat. Nam imparem habere posuimus. Non igitur pariter par est A. Pariter igitur impar tantum. *Q. E. D.* [k] 17. sept. [l] 21. hujus.

## PROP. XXXIV. THEOR. [XXXIV.]

*Si par numerus neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est et pariter impar.*

Numerus enim A neque sit a binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A et pariter parem, et pariter imparem esse.

At vero A, pariter parem esse manifestum est [m]; dimidium enim imparem non habet. [m] Def. 8. sept.

Dico etiam pariter imparem esse. A . . . . . . . . . . . .

Nam si A bifariam secemus, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. Si enim non incidemus in aliquem

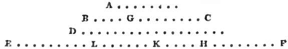
aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium; atque erit A a binario duplatus, quod non ponitur. Quare A pariter impar est. Ostensum autem est et pariter esse parem. Est igitur A, et pariter par, et pariter impar. *Q. E. D.*

[XXXV.] PROP. XXXV. THEOR.

*Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem a secundo et ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.*

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B C, D, E F incipientes a minimo A; et auferatur ab ipso B C, et ab E F, æqualis ipsi A; videlicet G C, F H: dico ut B G ad A, ita esse E H ad A, B C, D.

Ponatur enim ipsi quidem B C æqualis F K; ipsi vero D æqualis F L. Quoniam igitur F K est æqualis ipsi B C,




quorum F H est æqualis G C; erit reliquus H K reliquo G B æqualis. Et quoniam est ut E F ad D, ita D ad B C, et B C ad A; æqualis autem est D ipsi F L, et B C ipsi F K, et A ipsi F H. Erit ut E F ad L F, ita L F ad F K, et F K ad F H. Quare dividendo ut E L ad L F, ita L K ad F K, et K H ad F H; et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes[a]. Est igitur ut K H ad F H, ita E L, L K, K H, ad L F, K F, H F. Atque est K H quidem æqualis B G; F H vero ipsi A; et L F, K F, H F æquales ipsis D, B C, A. Ergo ut B G ad A, ita est E H ad D, B C, A. Est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. *Q. E. D.*

[a] 12. sept.

[XXXVI.] PROP. XXXVI. THEOR.

*Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.*

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in duplâ analogiâ, sc. A, B, C, D, quoad totus compositus primus fiat, et toti æqualis sit E,

et

et E ipsum D multiplicans faciat F G: dico F G perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, C, D multitudine, tot sumantur ab ipso E in duplâ analogiâ, qui sint E, H K, L, M. Ergo ex æquo ut A ad D, ita erit E ad M. Ac propterea qui fit ex E, D, est æqualis ei, qui ex A, M [o]. Est [o] 19. sept.

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

62.

E, 31. H——N——K L, 124. M, 248.

31 31

496

F——O————————G

31 465

Q ------- P ---------------

autem qui ex E, D ipse F G. Quare F G est qui fit ex A, M. Multiplicans igitur A ipsum M fecit F G. Atqui est A binarius: duplus igitur est F G ipsius M. Sunt autem et M, L, H K, E deinceps dupli inter se. Ergo E, H K, L, M, F G deinceps proportionales sunt in duplâ analogiâ. Auferatur a secundo H K, et ab ultimo F G ipsi primo E æqualis uterque H N, F O: est igitur ut secundi numeri excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes [p]. Quare ut N K ad E, ita O G ad M, L, H K, E. Atque est N K ipsi E æqualis [q]. Ergo et O G est æqualis ipsis M, L, H K, E. Est autem F O æqualis ipsi E [q]; atque E ipsis A, B, C, D, et unitati æqualis. Totus igitur F G æqualis est et ipsis E, H K, L, M, et ipsis A, B, C, D et unitati [r]; qui omnes ipsum F G metiuntur. Scilicet eum numerus D ipsum F G, ex D et E factum, necessario metiatur. In numeris autem A, B, C, D, quorum continua est ab ipsâ unitate analogia, maximum D præcedentium quisque metitur [s], et quem maximus ille metitur, F G. Numerum igitur F G metitur quisque illorum, A, B, C, D. Rursum in numeris E, H K, L, M, F G, quorum perpetua inde ab E in ratione unitatis ad binarium analogia, metitur quisque proxime sequentem, ac proinde se sequentes omnes. Metitur igitur et eorum unusquisque numerum F G. Omnes igitur A, B, C, D, E, H K, L, M illum F G metiuntur. Dico nullum alium metiri F G præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsum F G, qui sit P. Sitque P nulli

[p] 35. hujus.
[q] Per construct.
[r] Ax. 2. primi.
[s] 11. hujus.

I. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

62.

E, 31. H —— N —— K L, 124. M, 248.

31 31

496

F —— O —————— G

31 465

Q -------- P ---------------

nulli ipsorum A, B, C, D, E, H K, L, M idem. Et quoties P ipsum F G metitur, tot unitates sint in Q. Ergo Q ipsum P multiplicans fecit F G. Sed et E multiplicans D ipsum F G fecit[s]: est igitur ut E ad Q, ita P ad D[t]. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A, B, C, D, et qui unitatem sequitur A primus est; non metietur ipsum D aliquis alius numerus præter ipsos A, B, C[u]; et ponitur P nulli ipsorum A, B, C idem. Non igitur P ipsum D metietur. Ut autem P ad D, ita E ad Q. Ergo neque E metietur ipsum Q[x]. Atqui est E primus[y]. Omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est[z]. Quare E, Q primi inter se sunt. Sed primi etiam et minimi[a]; minimi vero eos, qui eandem quam ipsi rationem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem et consequens consequentem[b]; atque est ut E ad Q, ita P ad D. Ergo E æqualiter metitur ipsum P, atque Q ipsum D. Sed nullus alius metitur numerum D præter ipsos A, B, C. Quare Q idem est qui unus ipsorum A, B, C. Sit idem qui B; et quot sunt B, C, D multitudine, tot ab ipso E sumantur E, H K, L. Suntque E, H K, L in eâdem ratione, in quâ B, C, D[c]. Ex æquo igitur ut B ad D, ita est E ad L. Ergo qui fit ex B, L est æqualis ei, qui ex D, E[d]. Sed qui fit ex D, E est æqualis ei, qui ex Q, P. Qui igitur fit ex Q, P ei, qui ex B, L, æqualis erit. Quare ut C ad B, ita est L ad P[d]. Estque Q idem qui B. Ergo et L idem erit qui P; quod fieri non potest; etenim P nulli ipsorum expositorum idem ponitur. Non igitur ipsum F G metitur aliquis numerus præter ipsos A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitatem. Atque ostensus est F G æqualis ipsis A, B, C, D, E, H K, L, M, et unitati. Perfectus autem numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis[e]. Ergo F G perfectus est. *Q. E. D.*

[s] Per construct.
[t] 19. sept.
[u] 13. hujus.
[x] Def. 20. sept.
[y] ex hyp.
[z] 31. sept.
[a] 23. sept.
[b] 21. sept.
[c] Per construct.
[d] 19. sept.
[e] Def. 22. sept.

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER DECIMUS.

### DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectæ lineæ potentiâ commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur.

IV.

Incommensurabiles autem, cum quadrata, quæ ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicunque rectæ lineæ propositæ rectas lineas, multitudine infinitas, et commensurabiles esse et incommensurabiles; alias quidem longitudine simul et potentiâ commensurabiles, alias vero potentiâ solum. Vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

s VI.

VI.

Et huic commenſurabiles, ſive longitudine et potentiâ, ſive potentiâ ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero, irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratum, quod a rectâ lineâ propoſitâ fit, dicatur rationale.

IX.

Et ſpatia huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, dicantur irrationalia.

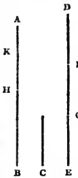
XI.

Et lineæ, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, ipſæ a quibus æqualia quadrata deſcribuntur.

[1.] PROPOSITIO I. THEOREMA.

*Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſitâ minor erit.*

Sint duæ magnitudines inæquales A B, C, quarum major A B: dico ſi ab ipſâ A B auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum eſt, rurſus auferatur majus quam dimidium, atque hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit.




Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine A B. Multiplicetur, et ſit D E ipſius quidem C multiplex, major autem quam A B; dividaturque D E in partes ipſi C æquales D F, F G, G E; et ab ipſâ A B auferatur majus quam dimidium B H, ab ipſâ vero A H rurſus majus quam dimidium auferatur H K, atque hoc ſemper fiat,

quoad

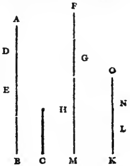
quoad divifiones, quæ funt in A B, multitudine æquales fiant divifionibus, quæ in D E. Sint igitur divifiones A K, K H, H B divifionibus D F, F G, G E multitudine æquales.

Et quoniam major eft D E quam A B, et ablatum eft ab ipfâ quidem D E minus quam dimidium, fc. E G, ab ipfâ vero A B majus quam dimidium, fc. B H; erit reliquum G D reliquo H A majus. Rurfus, quoniam major eft G D quam H A, et ablatum eft ab ipfâ quidem G D dimidium G F, ab ipfâ vero H A majus quam dimidium H K; reliquum D F reliquo A K majus erit. Eftque D F æqualis ipfi C. Ergo C quam A K eft major. Minor igitur eft A K quam C. Ergo ex magnitudine A B relicta eft magnitudo A K, expofitâ minori magnitudine C minor. *Q. E. D.*

Similiter autem demonftrabitur, etiam fi dimidia ablata fuerint.

Aliter. Exponantur duæ magnitudines inæquales A B, C, fitque C minor; et quoniam minor eft C, multiplicata erit aliquando magnitudine A B major. Fiat ut F M, dividaturque in partes ipfi C æquales M H, H G, G F; et ab ipfâ A B auferatur majus quam dimidium B E, et ab E A majus quam dimidium E D; atque hoc femper fiat, quoad divifiones, quæ funt in A B, numero æquales fiant divifionibus, quæ in F M. Fiant igitur ut B E, E D, D A; et ipfi D A unaquæque ipfarum K L, L N, N O fit æqualis, atque hoc fiat, quoad divifiones ipfius K O numero æquales fint divifionibus ipfius F M.

Et quoniam B E major eft quam dimidium ipfius A B, erit B E major quam E A: multo igitur major eft B E quam D A. Sed ipfi D A æqualis eft O N. Ergo B E major eft quam O N. Rurfus, quoniam E D major eft quam dimidium E A, erit E D major quam D A. Sed ipfi D A eft æqualis N L. Quare E D quam N L eft major: tota igitur D B major eft quam O L. Ipfi vero D A æqualis eft L K. Quare tota A B quam tota O K major erit.




 Sed

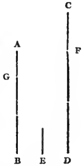
Sed M F major est quam B A: multo igitur M F quam O K est major. Et quoniam O N, N L, L K inter se æquales sunt; sunt autem et M H, H G, G F inter se æquales, atque est multitudo earum, quæ sunt in M F, æqualis multitudini ipsarum, quæ in O K: erit ut K L
[a] 12. quinti. ad F G, ita O K ad F M [a]. Major autem est F M quam
[b] 14. quinti. O K. Ergo et F G quam L K est major [b]. Atqui est F G ipsi C æqualis; et K L æqualis ipsi A D. Ergo C quam A D major erit. *Q. E. D.*

[II.] PROP. II. THEOR.

*Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detractâ semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt.*

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expositis A B, C D, quarum minor sit A B, et detractâ semper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines A B, C D incommensurabiles esse.

Si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quædam metietur. Metiatur, si fieri potest; sitque E; et A B quidem metiens D F relinquat seipsâ minorem C F; C F vero metiens B G relinquat seipsâ minorem A G; et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsâ E. Itaque fiat, et relinquatur A G ipsâ E minor. Quoniam igitur E metitur A B, A B vero metitur D F; et E ipsam D F metitur. Sed et metitur totam C D. Ergo et reliquam C F metietur. At C F metitur B G. Quare et E ipsam B G metitur. Metitur autem et totam A B. Et reliquam igitur A G metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur magnitudines A B, C D aliqua magnitudo metietur. Ergo A B, C D magnitudines incommensurabiles erunt.




Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detractâ semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. III. PROBL. [III.]

*Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.*

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles A B, C D, quarum minor A B: oportet ipsarum A B, C D maximam communem mensuram invenire.

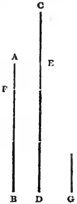
Vel igitur A B metitur C D, vel non metitur. Et si quidem A B metitur C D, metitur autem et seipsam; erit A B ipsarum A B, C D communis mensura. Et perspicuum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine A B ipsam A B non metietur.

Si vero A B non metitur C D; detractâ semper minore de majore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metietur [c], propterea quod A B, C D non sint incommensurabiles; et A B quidem metiens C D relinquat seipsâ minorem E C; E C vero metiens A B relinquat seipsâ minorem A F; et A F ipsam C E metiatur.




[c] 2. hujus.

Quoniam igitur A F metitur C E, sed C E metitur F B; et A F ipsam F B metitur. Metitur autem et seipsam; et totam igitur A B metietur. Sed A B metitur D E. Ergo A F ipsam D E metitur. Metitur autem et C E; et totam igitur C D metietur. Ergo A F ipsas A B, C D metitur. Ac propterea A F ipsarum A B, C D est communis mensura. Dico et maximam esse. Nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo major ipsâ A F, quæ ipsas A B, C D metietur. Itaque metiatur, et sit G. Et quoniam G metitur A B, A B vero metitur E D; et G ipsam E D metitur. Metitur autem et totam C D. Ergo et reliquam C E metietur. Sed C E metitur F B. Quare G ipsam F B metitur. Metitur autem et totam A B; et reliquam igitur A F metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo quædam major ipsâ A F magnitudines A B, C D metietur.




 Ergo

Ergo A F ipſarum A B, C D maxima erit communis menſura.

Duabus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis A B, C D, maxima ipſarum communis menſura A F inventa eſt. *Q. E. F.*

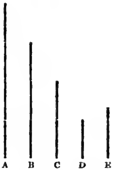
*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt, ſi magnitudo duas magnitudines metiatur, et maximam ipſarum communem menſuram metiri.

[IV.] PROP. IV. PROBL.

*Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram invenire.*

Sint datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C: oportet ipſarum A, B, C maximam communem menſuram invenire.

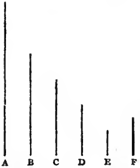
Sumatur enim duarum A, B maxima communis
[d] 3. hujus. menſura[d], quæ ſit D; itaque D ipſam C vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoniam D ipſam C metitur, metitur autem et A, B; et ipſas A, B, C metietur. Quare D ipſarum A, B, C communis eſt menſura. Et manifeſtum eſt maximam eſſe; magnitudo enim major magnitudine D ipſas A, B, C non metietur. Nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitudo major ipſâ D, quæ ſit E. Quoniam igitur E magnitudines A, B, C metitur, et ipſas A, B metietur, et ipſarum A, B




[e] Cor. 3. hujus. maximam communem menſuram D[e], major minorem, quod fieri non poteſt.

Sed non metiatur D ipſam C. Dico primum C, D commenſurabiles eſſe. Quoniam enim commenſurabiles ſunt A, B, C, metitur eas aliqua magnitudo, quæ ſcilicet et ipſas A, B metitur; ergo et ipſarum A, B maximam communem menſuram D. Metitur autem et ipſam C. Quare dicta magnitudo ipſas C, D metitur:
[f] Def. 1. primi. ideoque C, D commenſurabiles ſunt[f]. Sumatur ipſarum maxima communis menſura[d]; et ſit E. Quoniam igitur E metitur D, D vero metitur A, B; et E ipſas A, B metietur.

metietur. Metitur autem et C. Ergo E ipsarum A, B, C communis est mensura. Dico et maximam esse. Si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F major ipsâ E, quæ magnitudines A, B, C metiatur. Et quoniam F metitur A, B, C, et ipsas A, B metietur; et igitur ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur[g]. Sed D est maxima communis mensura ipsarum A, B: ergo F metitur D. Metitur autem et C: quare F ipsas C, D metitur; et igitur F metitur ipsarum C, D maximam communem mensuram. Sed ipsarum C, D maxima communis mensura est E: ergo F ipsam E metietur, major minorem, quod fieri non potest. Non igitur magnitudo major ipsâ E magnitudines A, B, C metietur. Ergo E ipsarum A, B, C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur, erit ipsa D.




[g] Cor. 3. hujus.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima ipsarum communis mensura inventa est. *Q. E. F.*

*Cor.* Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, et ipsarum maximam communem mensuram metiri.

Similiter et in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura invenietur, et Corollarium procedet.

## PROP. V. THEOR. [V.]

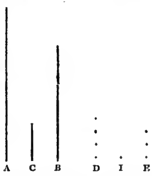
*Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.*

Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit C. Et quoties

ties C ipſam A metitur, tot unitates ſint in D; quoties autem C metitur B, tot unitates ſint in E.

Quoniam igitur C ipſam A metitur per unitates, quæ ſunt in D, metitur autem et unitas numerum D per unitates, quæ in ipſo ſunt; unitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. Ergo ut C ad A, ita eſt unitas ad D, et invertendo ut A ad C, ita D ad unitatem. Rurſus, quoniam C ipſam B metitur per unitates, quæ ſunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates, quæ in ipſo ſunt; unitas numerum E æqualiter metietur, atque C ipſam B. Eſt igitur ut C ad B, ita unitas ad E. Oſtenſum autem eſt et ut A ad C, ita eſſe D ad unitatem. Quare ex æquo ut A ad B, ita numerus D ad E numerum.




Commenſurabiles igitur magnitudines A, B inter ſe rationem habent, quam D numerus ad numerum E. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

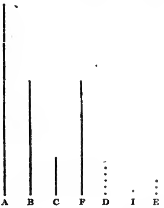
*Si duæ magnitudines inter ſe rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles.*

Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant, quam D numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in D, in tot partes æquales dividatur magnitudo A; et uni ipſarum æqualis ſit C: quot autem unitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus, æqualibus ipſi C, componatur magnitudo F.

Quoniam igitur quot ſunt in D unitates, tot magnitudines ſunt in A ipſi C æquales; quæ pars eſt unitas ipſius D, eadem pars erit et C ipſius A; ut igitur C ad A, ita eſt unitas ad D. Erit igitur invertendo ut A ad C, ita D numerus ad unitatem. Rurſus, quoniam quot unitates ſunt in E, tot ſunt et in F magnitudines

nitudines ipſi C æquales; ut C ad F, ita erit unitas ad E numerum. Oſtenſum autem eſt et ut A ad C, ita D eſſe ad unitatem. Ergo ex æquo ut A ad F, ita D ad E. Sed ut D ad E, ita A ad B; et igitur ut A ad B, ita A ad F. Quod cum A ad utramque ipſarum B, F eandem habeat rationem, erit B ipſi F æqualis[h]. Metitur autem C ipſam F. Ergo et ipſam B metietur. Sed et metitur A. Quare C ipſas A, B metitur: commenſurabilis igitur eſt A ipſi B[i].



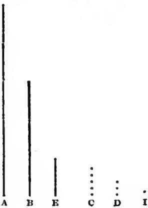

[h] 9. quinti.

[i] Def. 1. hujus.

Quare ſi duæ magnitudines inter ſe rationem habeant, quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles. *Q. E. D.*

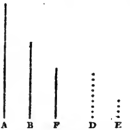
Aliter. Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant, quam numerus C ad numerum D: dico magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in C, in tot partes æquales dividatur A; et uni ipſarum æqualis ſit E: eſt igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. Eſt autem et ut C ad D, ita A ad B. Ergo ex æquo ut unitas ad D numerum, ita E ad B. Sed unitas metitur D. Ergo et E ipſam B metitur. Metitur autem et E ipſam A, quoniam et unitas metitur C. Quare E utramque ipſarum A, B metietur; ideoque A, B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.




*Cor.*

*Cor.* Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri ut D, E, et recta linea ut A, inveniri posse aliam rectam F, adquam A rationem habeat, quam numerus D ad numerum E. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis sumatur ut B, erit ut A ad F, ita quod fit ex A ad id quod ex B; hoc est, ut prima ad tertiam, ita figura, quæ fit a primâ, ad eam, quæ a secundâ, similem et similiter descriptam [k]. Sed ut A ad F, ita D numerus ad numerum E. Factum igitur est et ut D numerus ad numerum E, ita quod fit ex rectâ lineâ A ad id quod ex rectâ lineâ B.




[k] Cor. 2. 20. sexti.

[VII.] PROP. VII. THEOR.

*Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.*

Sint incommensurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere, quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum; commensurabilis erit A ipsi B [l]. Atqui non est commensurabilis. Non igitur A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum.

Quare incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum. *Q. E. D.*




[l] 6. hujus.

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

*Si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.*

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Si enim commensurabilis est A ipsi B, rationem habet, quam numerus ad numerum [m]. Atqui non habet: incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.




[m] 5. hujus.

Ergo

Ergo si duæ magnitudines inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. *Q. E. D.*

### * LEMMA I.

Si quatuor quantitatum prima sit ad secundam ut tertia ad quartam; erit et prima ad aliam, primæ utique et secundæ proportione mediam, ut tertia ad aliam, tertiæ et quartæ proportione mediam: modo tam tertia et quarta, quam prima et secunda, istiusmodi sint in suo genere quantitates, quæ proportione mediam capiant.

Sint A, B, C, D quatuor quantitates. Quarum prima A ad secundam B rationem habeat eandem, quam tertia C ad quartam D. Primæ et secundæ, A et B, sit E proportione media. Tertiæ item et quartæ, C et D, sit F proportione media. Dico esse A ad E ut C ad F. Non enim. Sed habeat A ad aliam quandam G proportionem eam, quam C ad F. Quam autem F ad D, eam habeat G ad H. Trium igitur A, G, H continua erit analogia; propter continuam trium C, F, D analogiam. Jam vero cum sit A ad G ut C ad F, et G ad H ut F ad D; ex æquo erit A ad H ut C ad D. Sed ut C ad D, ita A ad B [a]. Erit igitur A ad H ut eadem A ad B. Quantitates igitur H, B inter se æquales. Quare E quæ duarum A, B proportione media est, ipsi G æqualis erit, quæ duarum A, H proportione media. Quare A ad E eandem proportionem habet, quam A ad G. Est autem A ad G ut C ad F [c]. Quare et A ad E ut C ad F. *Q. E. D.*



A E B

C, 9. F, 12. D, 16.

G H



[a] ex hyp.

[c] Per construct.

PROP.

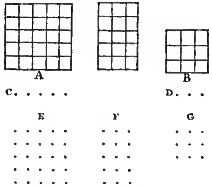
## [IX.] PROP. IX. THEOR.

*Quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et latera habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quæ a longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: et quadrata inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.*

Sint rectæ lineæ A, B longitudine commensurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, rationem habet, quam numerus ad numerum [q].

[q] 5. hujus.




Habeat, quam C ad D; et C seipsum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F; et D seipsum multiplicans faciat G. Itaque quoniam C seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero D fecit F; erit ut C ad D, hoc est, ut A ad B [r], ita E ad F [s]. Sed ut A ad B, ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum, quod fit sub A, B [t]. Est igitur ut quadratum

[r] Per construct.
[s] 17. sept.
[t] 1. sexti.

tum quod ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F. Rursus, quoniam D seipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero C ipsum F fecit; ut C ad D, hoc est, ut A ad B, ita erit F ad G [u]. Ut autem A ad B, ita rectangulum, quod fit sub A, B, ad quadratum, quod fit ex B: ergo ut rectangulum sub A, B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. Sed ut quadratum, quod fit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad F: ex æquo igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. Est autem uterque ipsorum E, G quadratus, et E quidem est a numero C, G vero ab ipso D. Quadratum igitur, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. *Q. E. D.*

[u] 17. sept.

Sed quadratum, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B, rationem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; et C ipsum D multiplicans faciat F: ergo E, F, G deinceps proportionales sunt in ratione ipsius C ad D [u]. Et quoniam inter quadrata, quæ fiunt ex A, B, medium proportionale est rectangulum sub A, B [x]; inter numeros vero quadratos E, G medius proportionalis est F [y]: erit ut quadratum, quod fit ex A, ad rectangulum sub A, B, ita E ad F [z]. Sed ut quadratum ex A, ad rectangulum sub A, B, ita A ad B: ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est, quam C ad D. *Q. E. D.*

[x] 1. sexti. [y] 11. octavi. [z] 1 lem. 1. & 8. hujus.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine [a]. Non est autem. Non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

[a] ex demonstratis.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. Si enim commensurabils sit A ipsi B longitudine,

tudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Atqui non habet. Non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis.

Ergo quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, &c. *Q. E. D.*

*Cor.* Et manifeſtum eſt ex jam demonſtratis, lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino et potentiâ commenſurabiles eſſe; quæ vero potentiâ commenſurabiles, non ſemper et longitudine; et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non ſemper et potentiâ incommenſurabiles; quæ vero potentiâ incommenſurabiles, omnino et longitudine incommenſurabiles eſſe.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt a rectis lineis longitudine commenſurabilibus, rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commenſurabilia ſunt: erunt rectæ lineæ longitudine commenſurabiles, non ſolum longitudine, ſed et etiam potentiâ, commenſurabiles.

Rurſus, quoniam quæcunque quadrata inter ſe rationem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commenſurabilia, ut oſtenſum eſt, eorum igitur latera tam longitudine quam potentiâ commenſurabilia ſunt: quæcunque autem quadrata rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed ſimpliciter quam aliquis numerus non quadratus ad alium numerum, commenſurabilia ſunt; hoc eſt, rectæ lineæ, a quibus ipſa deſcribuntur, commenſurabiles ſunt potentiâ, non autem et longitudine. Ergo rectæ lineæ longitudine quidem commenſurabiles, omnino et potentiâ commenſurabiles ſunt; potentiâ vero commenſurabiles, non ſemper et longitudine, niſi earum quadrata rationem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico et longitudine incommenſurabiles non ſemper potentiâ incommenſurabiles eſſe. Quoniam potentiâ commenſurabiles poſſunt rationem non habere, quam numerus ad numerum, ideoque cum potentiâ commenſurabiles ſint, longitudine ſunt incommenſurabiles. Ergo non

non quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, omnino et potentiâ: ſed longitudine incommenſurabiles exiſtentes aliæ etiam potentiâ aliæ potentiâ commenſurabiles erunt.

Potentiâ vero incommenſurabiles omnino et longitudine incommenſurabiles ſunt: ſi enim longitudine ſint commenſurabiles, et potentiâ commenſurabiles erunt[c]. Atqui ponuntur incommenſurabiles, quod eſt abſurdum: potentiâ igitur incommenſurabiles omnino et longitudine incommenſurabiles erunt.

[c] Ex hactenus oſtenſis.

## PROP. X. THEOR. [X.]

*Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; et tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; et tertia quartæ incommenſurabilis erit.*

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, C, D; ſitque ut A ad B, ita C ad D, et ſit A ipſi B commenſurabilis: dico et C ipſi D commenſurabilem eſſe.



Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit A ad B rationem, quam numerus ad numerum[d]. Atque eſt ut A ad B, ita C ad D: ergo et C ad D rationem habet, quam numerus ad numerum: commenſurabilis igitur eſt C ipſi D[e].

[d] 5. hujus.
[e] 6. hujus.

Sed A ipſi B ſit incommenſurabilis: dico et C ipſi D incommenſurabilem eſſe. Non enim. Commenſurabilis igitur. Habet igitur C ad D rationem, quam numerus ad numerum. Sed ut C ad D, ita A ad B. Quare et numerus ad numerum. Si enim C ad D rationem habeat, quam numerus ad numerum; et A ad B eam, quam numerus ad numerum, rationem habebit[g]: atque erit A ipſi B commenſurabilis[h], quod eſt abſurdum; incommenſurabilis enim ponitur. Ergo C ad D rationem non habet, quam numerus ad numerum. Ideoque C ipſi D eſt incommenſurabilis[i].

[g] 11. quinti.
[h] 6. hujus.
[i] 8. hujus.

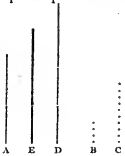
Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et quæ ſequuntur. *Q. E. D.*

PROP.

## [XI.] PROP. XI. PROBL.

*Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.*

Sit proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentiâ.




Exponantur duo numeri B, C, inter se rationem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc

[l] Cor. 6. hujus. enim ante traditum est [l]. Ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. Et quoniam B ad C rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex D rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis

[m] 9. hujus. igitur est A ipsi D longitudine [m]. Sumatur inter ipsas A, D media proportionalis E: est igitur ut A ad D, ita

[n] Cor. 2. 20. sexti. quadratum ex A ad quadratum ex E [n]. Sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis: ergo et quadratum

[o] 10. hujus. ex A quadrato ex E incommensurabile erit [o]: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ. Ergo propositæ rectæ lineæ rationali, a qua dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentiâ quidem commensurabilis inventa est D, hoc est, rationalis potentiâ tantum commensurabilis,

[p] Def. 5. hujus. irrationalis vero E [p]. Irrationales enim universe appellantur, quæ rationali et longitudine et potentiâ incommensurabiles sunt. *Q. E. D.*

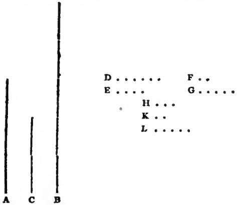
PROP.

## PROP. XII. THEOR. [XII.]

*Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt.*

Utraque enim ipsarum A, B ipsi C sit commensurabilis: dico et A ipsi B commensurabilem esse.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C, habebit A ad C rationem, quam numerus ad numerum[p]. Habeat, p 5. hujus.




quam numerus D ad numerum E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B rationem, quam numerus ad numerum. Habeat, quam F ad G. Et rationibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, et quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps proportionales H, K, L in datis rationibus[q]; sitque ut D q 2. octavi.
ad E, ita H ad K; ut autem F ad G, ita K ad L.

Quoniam igitur est ut A ad C, ita D ad E; sed ut D ad E, ita H ad K: erit et ut A ad C, ita H ad K. Rursus, quoniam est ut C ad B, ita F ad G, sed ut F ad G, ita K ad L; erit et ut C ad B, ita K ad L. Est autem et ut A ad C, ita H ad K: ex æquo igitur ut A ad B, ita H ad L[r]: ergo A ad B rationem habet quam numerus H r 23. quinti.
ad L numerum: ac propterea A ipsi B est commensurabilis[s]. s 6. hujus.

Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles, et inter se commensurabiles sunt. *Q. E. D.*

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

*Si sint duæ magnitudines, et altera quidem alii cuidam sit commensurabilis, altera vero eidem incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.*

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem sit C; et A quidem ipsi C commensurabilis sit, B vero eidem incommensurabilis: dico et A ipsi B incommensurabilem esse.




Si enim commensurabilis est A ipsi B, quoniam et ipsi C commensurabilis est A; erit et C ipsi
t 12. hujus. B commensurabilis t. Quod est contra hypothesin.

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

*Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit.*

Sint duæ magnitudines commensurabiles A, B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: dico et reliquam B ipsi C incommensurabilem esse.

Si enim commensurabilis est B ipsi C, quoniam et ipsi B commensurabilis est A; et A
u 12. hujus. ipsi C commensurabilis erit u. Sed et incommensurabilis, quod fieri non potest. Non igitur commensurabilis est B ipsi C: ergo est incommensurabilis.

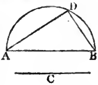



Si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; et reliqua eidem incommensurabilis erit. *Q. E. D.*

LEMMA II.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest quam minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B, C, quarum major sit A B: oportet invenire id, quo A B plus potest quam C.




Describatur super rectam lineam A B semicirculus A D B; et in eo ap-

tetur

tetur recta linea A D, ipsi C æqualis [x]; et D B jungatur. [x] 1. quarti.
Perspicuum est angulum A D B rectum esse [y], et ipsam [y] 31. tertii.
A B plus posse quam A D, hoc est, quam C, quantum est
rectæ lineæ D B quadratum [z]. [z] 47. primi.

Similiter autem et datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest hoc modo invenietur.

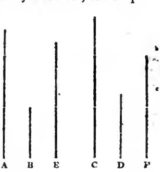
Sint duæ datæ rectæ lineæ A D, D B, et oporteat invenire rectam lineam, quæ ipsas possit. Exponantur enim ita, ut rectum angulum A D B contineant, et A B jungatur: patet rursus rectam lineam A B ipsas A D, D B posse [z].

## PROP. XV. THEOR. [XV.]

*Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et tertia quam quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.*

Sint quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, sitque ut A ad B, ita C ad D; et A quidem plus possit quam B quadrato, quod fit ex E; C vero plus possit quam D quadrato ex F: dico si A ipsi E longitudine sit commensurabilis, et C ipsi F longitudine commensurabilem esse; si vero A ipsi E sit longitudine incommensurabilis, et C ipsi F longitudine incommensurabilem esse.

Quoniam enim est ut A ad B, ita C ad D; erit ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id quod ex D fit quadratum [b]. Sed quadrato quidem, quod fit ex A, æqualia sunt quadrata, quæ ex ipsis E, B [c]; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F, D: igitur ut quadrata, quæ fiunt ex E, B, ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ fiunt ex F, D, ad quadratum ex D; et dividendo ut quadra-




[b] 22. sexti.
[c] ex hyp.

 tum

[d] 17. quinti. tum ex E ad quadratum ex B, ita quadratum ex F,
[e] 22. sexti. ad quadratum ex D[d]. Quare ut E ad B, ita est F ad D[e],
[f] 4. quinti. et invertendo ut B ad E, ita D ad F[f]. Est autem et ut A ad B, ita C ad D: ex æquo igitur ut A ad E, ita
[g] 22. quinti. est C ad F[g]. Ergo si A longitudine est commensurabilis ipsi E, et C ipsi F longitudine erit commensurabilis; si
[h] 10. hujus. vero incommensurabilis est A ipsi E, et C ipsi F incommensurabilis erit[h].

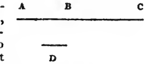
Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

[XVI.] PROP. XVI. THEOR.

*Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis; et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.*

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C commensurabilem esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A B, B C, me-
[i] Def. 1. hujus. tietur eas aliqua magnitudo[i].



Metiatur, sitque D. Et quoniam D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B, B C: ergo D magnitudines A B, B C et ipsam A C metitur. Commensurabilis igitur est A C utrique ipsarum A B, B C.

Sed A C uni ipsarum A B, B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B: dico et A B, B C commensurabiles esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt A C, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, et sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas A C, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas A B, B C metietur. Ac propterea A B, B C commensurabiles sunt.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si &c. *Q. E. D.*

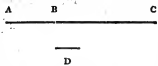
PROP.

## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur; et tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum sit incommensurabilis; et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.*

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C: dico et totam magnitudinem A C utrique ipsarum A B, B C incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles C A, A B, metietur eas aliqua magnitudo. Metiatur, sitque D, si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas C A, A B, et reliquam B C metietur. Metitur autem et B A: ergo D ipsas A B, B C metitur; ac propterea commensurabiles sunt A B, B C[k]. Ponuntur autem et incommensurabiles, quod fieri non potest. Non igitur ipsas C A, A B metietur aliqua magnitudo: quare C A, A B incommensurabiles sunt. Similiter et A C, C B incommensurabiles esse demonstrabimus. Ergo A C utrique ipsarum A B, B C est incommensurabilis.




[k] Def. 1. hujus.

Sed A C uni ipsarum A B, B C incommensurabilis sit; et primum ipsi A B: dico et A B, B C incommensurabiles esse. Si enim sunt commensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur[k]. Metiatur, et sit D. Quoniam igitur D metitur ipsas A B, B C, et totam A C metietur. Metitur autem et A B: ergo D ipsas C A, A B metitur: ideoque C A, A B commensurabiles sunt. Ponuntur autem et incommensurabiles, quod fieri non potest. Non igitur ipsas A B, B C metietur aliqua magnitudo: quare A B, B C incommensurabiles erunt. Similiter demonstrabimus, si A C incommensurabilis sit ipsi C B, etiam A B, B C incommensurabiles esse.

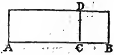
Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. *Q. E. D.*

### LEMMA III.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadrati; parallelogram-

mum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub partibus rectæ lineæ, ex applicatione factis, continetur.

Ad aliquam enim rectam A B, applicetur A D parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ D B: dico parallelogrammum A D rectangulo ſub A C, C B æquale eſſe.




Atque hoc per ſe patet: quoniam enim quadratum eſt D B, erit D C ipſi C B æqualis; atque A D eſt parallelogrammum, quod ſub A C, C B continetur.

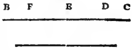
Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, &c. Q. E. D.

[XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

*Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi major tanto plus poſſit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet.*

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati quod ſit a minori A, (hoc eſt, ei, quod ſit a dimidiâ ipſius A) æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et ſit quod continetur ſub B D, D C; ſitque B D ipſi D C commenſurabilis longitudine: dico B C plus poſſe quam A quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Secetur enim B C bifariam in puncto E, et ipſi D E æqualis ponatur E F: reliqua igitur D C eſt æqualis B F. Et quoniam recta linea B C ſecatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit rectangulum ſub B D, D C unà cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E C[1]; quare et




[1] 5. ſecundi.

et eorum quadrupla inter ſe æqualia erunt. Quod igitur quater ſub B D, D C continetur unà cum quadrato, quod quater fit ex E D, æquale eſt quadrato, quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater ſub B D, D C continetur, æquale eſt quadratum ex A; ei vero, quod quater fit ex D E, æquale eſt quadratum ex D F [m]; etenim D F ipſius D E eſt dupla; et ei, quod quater fit ex E C, æquale eſt quadratum ex B C; rurſus enim B C dupla eſt ipſius E C. Ergo quadrata, quæ fiunt ex A, D F, æqualia ſunt ei quod fit ex B C quadrato: ac propterea quadratum, quod fit ex B C, majus eſt quam quadratum, quod ex A, quadrato ex D F. Recta igitur linea B C tanto plus poteſt quam A, quantum eſt ipſius D F quadratum. Oſtendendum eſt et B C ipſi D F commenſurabilem eſſe. Quoniam B D commenſurabilis eſt ipſi D C longitudine [m], erit et B C ipſi D C longitudine commenſurabilis [n]. Sed D C ipſis C D, B F ſimul ſumptis eſt commenſurabilis longitudine; æqualis enim eſt C D ipſi B F [o]. Quare et B C ipſis B F, C D ſimul ſumptis longitudine eſt commenſurabilis; et reliquæ igitur F D longitudine commenſurabilis erit [o]. Ergo B C plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

[m] ex hyp.
[n] 16. hujus.
[o] 6. hujus.

Sed B C plus poſſit quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et ſit quod continetur ſub B D, D C. Oſtendendum eſt B D ipſi D C longitudine commenſurabilem eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus B C plus poſſe quam A quadrato rectæ lineæ F D. Sed B C plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [n]: ergo B C commenſurabilis eſt ipſi F D longitudine; et reliquæ igitur, duabus ſcilicet B F, D C ſimul ſumptis, longitudine eſt commenſurabilis [o]. Sed ex duabus B F, D C compoſita ipſi D C commenſurabilis eſt longitudine, etenim B F eſt æqualis D C; ergo et B C ipſi D C longitudine eſt commenſurabilis. Conſtat igitur B D ipſi D C longitudine commenſurabilem eſſe [o].

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſint, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, &c. *Q. E. D.*

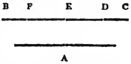
 PROP.

## [XIX.] PROP. XIX. THEOR.

*Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommenſurabiles longitudine ipſam dividat; major tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi major tanto plus poſſit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam dividet.*

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, B C, quarum major B C; quartæ autem parti quadrati, quod ſit a minori A, æquale parallelogrammum ad ipſam B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et ſit quod continetur ſub B D, D C; ſitque B D ipſi D C longitudine incommenſurabilis: dico B C plus poſſe quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam B C plus poſſe quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Oſtendendum igitur eſt B C ipſi D F longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam incommenſurabilis eſt B D ipſi D C, erit et B C ipſi

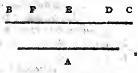



q 17. hujus. D C longitudine incommenſurabilis q. Sed D C commenſurabilis eſt duabus B F, D C ſimul ſumptis: ergo et B C duabus B F, D C ſimul ſumptis longitudine eſt incom-
r 14. hujus. menſurabilis r. Ac propterea B C reliquæ F D incommenſurabilis eſt longitudine; et B C plus poteſt quam A, quadrato ex F D q. Igitur B C plus poteſt quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Sed B C rurſus plus poſſit quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; quartæ autem parti quadrati, quod ſit ex A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figurâ quadratâ; et ſit quod ſub B D, D C continetur. Oſtendendum eſt B D ipſi D C longitudine incommenſurabilem eſſe.

Iiſdem

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus B C plus poſſe quam A, quadrato rectæ lineæ D F. Sed B C plus poteſt quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis[s]: incommenſurabilis igitur eſt B C ipſi D F longitudine: quare et reliquæ, videlicet duabus B F, D C ſimul ſumptis, eſt incommenſurabilis[t]. Sed ex duabus B F, D C compoſita commenſurabilis eſt longitudine ipſi D C[u]. Ergo et B C ipſi D C eſt incommenſurabilis longitudine[x]; ac propterea dividendo B D ipſi D C longitudine incommenſurabilis erit[t].



[s] ex hyp. [t] 17. hujus. [u] 6. hujus. [x] 14. hujus.

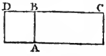
Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſint, &c. *Q. E. D.*

## PROP. XX. THEOR. [XX.]

*Quod ſub rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, rationale eſt.*

Exponatur recta quædam A B, et longitudine huic commenſurabilis alia B C. Dico rectangulum A C, ſub duabus A B, B C comprehenſum, rationale eſſe.

Deſcribatur ex A B quadratum A D: ergo A D eſt rationale[y]. Et quoniam A B commenſurabilis eſt ipſi B C longitudine, atque eſt A B æqualis B D; erit B D ipſi B C longitudine commenſurabilis. Eſt autem et ut B D ad B C, ita D A ad A C[z]; et commenſurabilis eſt B D ipſi B C: ergo et D A ipſi A C commenſurabile erit[a]. Eſtque rationale D A: quare et A C eſt rationale[b].



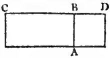
[y] Def. 8. hujus. [z] 1. ſexti. [a] 10. hujus. [b] Def. 9. hujus.

Quod igitur ſub rationalibus, &c. *Q. E. D.*

## PROP. XXI. THEOR. [XXI.]

*Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.*

Rationale enim A C ad rationalem, nempe A B, applicetur, latitudinem faciens B C: dico B C rationalem eſſe, et ipſi A B longitudine commenſurabilem.



Deſcribatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D rationale eſt. Sed et rationale eſt A C: ergo A D ipſi A C eſt commenſurabile,

[a] Def. 9. hujus. [b] 1. sexti. mensurabile [a]. Atque est ut D A ad A C, ita D B ad B C [b]. Commensurabilis igitur est D B ipsi B C longitudine. Est autem B D æqualis B A: quare A B ipsi B C longitudine commensurabilis est. Sed A B est rationalis. Rationalis igitur est et B C, et ipsi B A longitudine commensurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, &c. *Q. E. D.*

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

*Quod sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale est; et recta linea, ipsum potens, est irrationalis, vocetur autem media.*

Vide fig. Prop. 20. Sub rationalibus enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C irrationale esse; et rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse; vocetur autem media.

Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D rationale est [c]. Et quoniam A B incommensurabilis est ipsi B C longitudine, potentiâ enim solum ponuntur commensurabiles, atque est A B æqualis B D: incommensurabilis igitur est D B ipsi B C longitudine. Est autem ut D B ad B C, ita A D ad A C [d]: ergo A C ipsi A D est incommensurabile. Sed A D rationale est: irrationale igitur est A C [e]: quare et recta linea, quæ ipsum A C potest, videlicet, quæ potest quadratum ipsi æquale, est irrationalis [f]. Vocetur autem media; propterea quod ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod sub A B, B C continetur, et inter ipsas A B, B C media sit proportionalis. *Q. E. D.*

[c] Def. 8. hujus.

[d] 1. sexti.

[e] Def. 10. hujus.

[f] Def. 11. hujus.

[XXIII.] PROP. XXIII. THEOR.

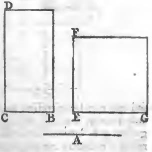
*Quod fit a mediâ ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; sed ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.*

Duarum quarundam rationalium, potentiâ solum commensurabilium, sit media A; et ad aliquam rationalem, C B, ei quod fit ex A æquale spatium applicetur B D, latitudinem faciens C D: dico C D rationalem esse, sed ipsi B C longitudine incommensurabilem.

Quoniam enim media est A, potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus [g]. Possit G F, sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus E G, E F comprehensum. Sed potest et B D. Æquale

[g] 22. hujus.

Æquale igitur est B D ipsi G F. Atque est illi æquiangulum; æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproce proportionalia[h]: ergo ut recta B C ad E G rectam, ita est E F ad C D. Est igitur et ut quadratum ex B C ad quadratum ex E G, ita quadratum ex E F ad id quod fit ex C D quadratum[l]. Sed quadratum ex B C commensurabile est quadrato ex E G[k], utraque enim ipsarum est rationalis: commensurabile igitur est et quadratum ex E F quadrato ex C D[l]. Est autem quadratum ex E F rationale; nimirum cum E G, E F rationales sint potentiâ commensurabiles. Ergo et rationale est quadratum ex C D. Ac propterea recta linea C D est rationalis[k]. Præterea quoniam F E incommensurabilis est ipsi E G longitudine, potentiâ enim solum commensurabiles sunt[m], ut autem F E ad E G, ita quadratum ex E F ad rectangulum sub F E, E G: erit quadratum ex E F incommensurabile rectangulo sub F E, E G[l]. Sed quadrato quidem ex E F commensurabile est quadratum ex C D, id enim ostensum: ergo quadratum ex C D incommensurabile est rectangulo sub E F, E G. Sed eidem rectangulo sub E F, E G est commensurabile rectangulum sub D C, C B, utrumque enim est æquale quadrato ex A: ergo quadratum ex C D incommensurabile est rectangulo sub D C, C B[n]. Sed ut quadratum ex C D ad rectangulum sub D C, C B, ita est D C ad C B. Ergo D C ipsi C B incommensurabilis est longitudine; et ob id D C est rationalis, sed ipsi C B longitudine incommensurabilis[k]. *Q. E. D.*




[h] 14. sexti.
[l] 22. sexti.
[k] Def. 6. hujus.
[l] 10. hujus.
[m] 22. hujus.
[n] 13. hujus.

## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

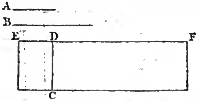
*Mediæ commensurabilis, sive longitudine sive potentiâ tantum, media est.*

Sit media A, et ipsi A commensurabilis sit B: dico et B mediam esse.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale ad C D applicetur spatium rectangulum

C E,

C E, latitudinem efficiens E D. Rationalis igitur eſt E D,




[a] 23. hujus. ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [a]. Quadrato autem ex B æquale ad D C applicetur ſpatium rectangulum C F, latitudinem efficiens D F. Quoniam igitur recta A potentiâ ſaltem commenſurabilis eſt ipſi B, erit [t] Def. 3. hujus. quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile [t]. Sed [u] Per conſtruct. quadrato quidem ex A æquale eſt rectangulum E C [u]; quadrato autem ex B æquale C F. Commenſurabile igitur eſt rectangulum E C rectangulo C F. Atque eſt ut E C ad C F, [x] 1. ſexti. ita E D ad D F [x]: ergo E D ipſi D F longitudine eſt commenſurabilis. Eſt autem E D rationalis, et longitudine incommenſurabilis ipſi D C [a]: ergo et D F rationalis eſt, [y] 13. hujus. et ipſi D C longitudine incommenſurabilis [y]: rationales igitur ſunt C D, D F, potentiâ ſolum commenſurabiles. Quod autem ſub rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, irrationale eſt; et recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vo- [z] 22. hujus. caturque media [z]: ergo recta linea quæ poteſt rectangulum ſub C D, D F eſt media. Sed B poteſt rectangulum ſub C D, D F: quare B media erit.

## * DEFINITIO XII.

Spatium medium dicitur, quod quadrato ex mediâ eſt æquale.

*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe. Poſſunt enim ipſa rectæ lineæ quæ ſunt potentiâ commenſurabiles, quarum altera media eſt: ergo et reliqua media erit.

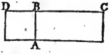
## [XXV.] PROP. XXV. THEOR.

*Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium eſt.*

Sub mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C medium eſſe.

Deſcribatur

Describatur enim ex A B quadratum A D: ergo A D medium est. Et quoniam commensurabilis est A B ipsi B C longitudine, æqualis autem A B ipsi B D; erit D B ipsi B C longitudine commensurabilis: quare D A commensurabile est ipsi A C. Sed A D est medium: ergo et A C medium erit[a]. *Q. E. D.*



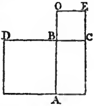

[a] Cor. 24. hujus.

## PROP. XXVI. THEOR. [XXVI.]

*Quod sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est vel medium.*

Sub mediis enim potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis A B, B C contineatur rectangulum A C: dico A C vel rationale esse, vel medium.

Describantur enim ex A B, B C, quadrata A D, B E: utrumque igitur ipsorum A D, B E medium est. Exponatur rationalis F G; et ipsi quidem A D æquale ad F G applicetur parallelogrammum rectangulum G H, latitudinem faciens F H; ipsi vero A C æquale ad H M applicetur rectangulum M K, latitudinem faciens H K[b]; et insuper ipsi B E æquale similiter ad K N applicetur N L, latitudinem faciens K L. In rectâ igitur lineâ sunt F H, H K, K L[c]. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A D, B E, atque est A D quidem æquale ipsi G H, B E vero ipsi N L; erit et utrumque ipsorum G H, N L medium, et ad rationalem F G applicata sunt. Ergo et utraque ipsarum F H, K L est rationalis, et ipsi F G longitudine incommensurabilis[d]. Et quoniam commensurabile est A D ipsi B E[e]; erit et G H ipsi N L commensurabile. Sed est ut G H ad N L, ita F H ad K L[f]. Ergo F H ipsi K L est commensurabilis longitudine[g]; ac propterea F H, K L rationales sunt longitudine commensurabiles. Rationale igitur est rectangulum, quod sub F H, K L continetur[h]. Et quoniam B D quidem ipsi B A est æqualis, O B vero ipsi B C; erit ut







[b] 45. primi.

[c] 14. primi.

[d] 23. hujus.

[e] ex hyp.

[f] 1. sexti.

[g] 10. hujus.

[h] 20. hujus.

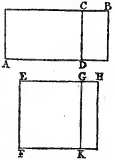
ut D B ad B C, ita A B ad B O. Sed ut D B ad B C, ita
g 1. sexti. D A quadratum ad rectangulum A C[g]. Ut autem A B ad B O, ita A C rectangulum ad quadratum C O: est igitur ut D A ad A C, ita A C ad C O. Æquale autem est A D ipsi G H, et A C ipsi M K, et C O ipsi N L. Quare ut G H ad M K, ita M K ad N L; et igitur ut F H ad H K, ita H K ad K L: ideoque quod sub F H, K L continetur
h 17. sexti. est æquale quadrato, quod fit ex H K[h]. Est autem quod
i 20. hujus. continetur sub F H, K L rationale[i]: ergo et rationale est quadratum ex H K; ac propterea recta linea H K rationalis. Et si quidem H K commensurabilis est ipsi H M, hoc est, ipsi F G, longitudine, erit rectangulum
k 22. hujus. & Def. 12. N H rationale[k]. Si vero H K est incommensurabilis ipsi F G longitudine, K H, H M rationales erunt potentiâ solum commensurabiles, et ob id rectangulum H N medium erit[k]: ergo H N vel rationale est vel medium. Sed H N est, æquale ipsi A C: quare A C vel rationale, vel medium est.

Quod igitur sub mediis potentiâ solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium. *Q. E. D.*

[XXVII.] PROP. XXVII. THEOR.

*Medium non superat medium rationali.*

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B; et exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H; ipsi vero
l 45. primi. A C æquale auferatur F G[l]: reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A B, A C, estque A B æquale F H, et A C æquale F G; erit et utrumque ipsorum F H, F G medium. Et ad rationalem E F applicata sunt: rationalis igitur est utraque earum E H, E G, sed ipsi E F longitudine incommensura-




m 23. hujus. bilis[m]. Et quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale; et K H rationale erit. Est autem ad rationalem E F applicatum: rationalis igitur est G H, et ipsi E F commen-

commensurabilis longitudine[m]. Sed et E G est rationalis, et ipsi E F longitudine incommensurabilis: ergo E G incommensurabilis est ipsi G H longitudine[n]. Atque est ut E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod sub E G, G H continetur[o]: incommensurabile igitur est quadratum ex E G rectangulo sub E G, G H[p]. Sed quadratum quidem ex E G commensurabile est quadratis ex E G, G H simul sumptis; nimirum cum quadrata illa ex E G, G H utraque sint rationalia. Rectangulo autem sub E G, G H commensurabile est quod bis sub E G, G H continetur rectangulum, utpote illius duplum. Quadratis igitur ex E G, G H simul sumptis incommensurabile est id, quod bis sub E G, G H continetur rectangulum[q]. Quapropter et quod componitur ex quadratis ex E G, G H simul sumptis, una cum eo, quod bis sub E G, G H continetur, rectangulo, hoc est, ipsum ex E H quadratum[r], incommensurabile est quadratis ex E G, G H[s]. Sunt autem rationalia quae fiunt ex E G, G H quadrata: irrationale igitur est quadratum ex E H[t]: ac propterea E H est irrationalis. Sed et rationalis, quod fieri non potest.

[m] 21. hujus. [n] 13. hujus. [o] 1. sexti. [p] 10. hujus. [q] 14. hujus. [r] 4. secundi. [s] 17. hujus. [t] Def. 10. hujus.

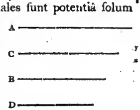
Non igitur medium superat medium rationali. *Q. E. D.*

## PROP. XXVIII. PROBL. [XXVIII.]

*Datis duabus rationalibus potentiâ solum commensurabilibus, medias invenire potentiâ solum commensurabiles, quae rationale contineant.*

Exponantur duae rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, et sumatur inter ipsas A, B media proportionalis C[u], fiatque ut A ad B, ita C ad D[x].

Quoniam igitur A, B rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, erit quod sub ipsis A, B continetur rectangulum[y], hoc est, quadratum ex C[z], medium: ergo recta linea C media est. Et quoniam ut A ad B, ita est C ad D, suntque A, B potentiâ solum commensurabiles; et C, D potentiâ solum commensurabiles erunt[a]. Est autem recta linea C media: media igitur est et D[b]: quare C, D mediae sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico etiam ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut A ad B, ita C ad D, erit permutando ut A ad C, ita B ad D[c].



[u] 13. sexti. [x] 12. sexti. [y] 22. hujus. [z] 17. sexti. [a] 10. hujus. [b] 24. hujus. [c] 16. quinti.

Sed

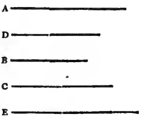
Sed ut A ad C, ita C ad B: ergo et ut C ad B, ita B ad D: quod igitur ſub ipſis C, D continetur, quadrato ex B
[a] 17. ſexti. eſt æquale [a]. Rationale autem eſt quadratum ex B. Ergo et quod continetur ſub C, D, rationale erit.

Inventæ igitur ſunt mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. *Q. E. F.*

## [XXIX.] PROP. XXIX. PROBL.

*Datis tribus rationalibus potentiâ ſolum commenſurabilibus, medias invenire potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.*

Exponantur tres rationales potentiâ ſolum commenſurabiles A, B, C, ſumaturque inter ipſas A, B media
[d] 13. ſexti. proportionalis D [d], et fiat ut B ad C, ita D ad E [e].
[e] 12. ſexti. Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles, erit quod ſub A, B continetur rectan-
[f] 21. hujus. gulum [f], hoc eſt, quadratum
[g] 17. ſexti. ex D, medium [g]: ergo D media eſt. Et quoniam B, C ſunt rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, atque eſt ut B ad C, ita D ad E; rectæ lineæ D, E potentiâ ſo-
[h] 10. hujus. lum commenſurabiles erunt [h]. Eſt autem D media: ergo et
[l] 24. hujus. E media eſt [l]; ac propterea D, E mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Dico ipſas etiam medium continere. Quoniam enim eſt ut B ad C, ita D ad E, erit permutando ut B ad D, ita C ad E. Ut autem B ad D, ita eſt D ad A: ergo et ut D ad A, ita C ad E. Quod igitur ſub A, C continetur rectangulum, eſt æquale
[k] 16. ſexti. contento ſub D, E [k]. Eſt autem quod continetur ſub A, C medium [f]. Ergo et quod continetur ſub D, E, medium erit.




Inventæ igitur ſunt mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent. *Q. E. F.*

### LEMMA IV.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipſis componitur etiam quadratus ſit.

Exponantur duo numeri AB, BC, qui vel pares ſint

A . . . . . D . . . . . C . . . . . . . . B

utrique, vel utrique impares. Et quoniam ſive a pari par auferatur,

auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est[l]; erit A C [l] 24. & 26.
numerus par. Secetur A C bifariam in D. Ergo qui fit noni.
sub A B, B C una cum quadrato ex C D est æqualis ei,
qui fit ex B D quadrato[m]. Sed et similes plani sint [m] 6. secundi.
A B, B C. Itaque qui fit ex A B, B C est quadratus; ostensum enim est si duo similes plani sese multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum esse[n]. Inventi igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit sub A B, B C, et qui fit ex C D, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex B D. *Q. E. F.* [n] 1. noni.

*Cor.* Et manifestum est rursus inventos esse duos numeros quadratos, et qui fit ex B D, et qui ex C D, ita ut ipsorum excessus, videlicet qui fit sub A B, B C, sit quadratus; quando A B, B C similes plani sunt. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et qui fit ex B D, et qui ex C D, quorum excessus, nempe qui sub A B, B C, non est quadratus.

### LEMMA V.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit enim qui sub A B, B C quadratus[o], ut dictum est, [o] Lemma
et par numerus C A; seccturque C A bifariam in D. præc.
Perspicuum est quadratum factum ex A B, B C, una cum quadrato ex C D, æqualem esse ei qui fit ex B D quadrato[m]. Auferatur unitas D E; ergo qui sub A B, B C quadratus una cum quadrato ex C E, minor est quadrato ex B D. Dico igitur numerum, ex quadrato sub A B, B C, una cum quadrato ex C E compositum, quadratum non esse.

Vel quod perinde est, si factus sub A B, B C et quadratus ex C E compositi efficiant numerum M, dico M non esse quadratum. Propter æquales A D, D C, major

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . . . . . B

M 160.

N ——

erit A E quam E C. Majori igitur A E auferatur F G, minori E C æqualis. Et cum E A major sit quam E G, addito communi B E, major erit B A quam B G. Factus igitur ex A B, B C facto ex G B, B C major. Et quadrato

A . . G . . . D . E . . . . C . . . . . . . . B
M 160.
N ——

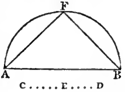
ex C E communiter addito, qui componitur ex facto sub A B, B C una cum quadrato ex C E major erit eo, qui componitur ex facto sub G B, B C una cum quadrato ex C E. Sed composito ex prioribus æqualis est numerus 16. secundi. M; ex alteris composito, quadratus ex B E p. Numerus igitur M quadrato ex B E major erit. Idem vero numerus M, ex facto utique sub A B, B C una cum quadrato C E compositus, quadrato ex B D, ex supra ostensis, minor. Jam vero si quadratus sit numerus M, numerus aliquis seipsum multiplicans illum M fecerit. Sit igitur N numerus, qui, seipsum multiplicans, illum M fecit. Et cum quadratus M quadrato ex B E major, quadrato autem ex B D minor sit, quadrati autem majores ex majoribus necessario fiant; omnino numerus N, ex quo factus est quadratus M, numero B E major, numero autem B D minor erit. Quod est absurdum. Non datur enim numerus minor quam B D, qui major idem sit quam B E. Quando ipsi B D, B E unitate differunt. Non est igitur quadratus M. Inventi sunt igitur quadrati duo, nempe quadratus sub A B, B C factus, et quadratus ex C E, qui compositi non quadratum efficiunt.

## [XXX.] PROP. XXX. PROBL.

*Invenire duas rationales, potentiâ solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.*

Exponatur rationalis quædam A B, et duo quadrati numeri C D, D E, ita ut ipsorum excessus C E non q Cor. Lem. 4. sit quadratus q: describatur autem super rectam lineam A B semicirculus A F B, fiatque ut D C ad C E, ita ex A B r Cor. 6. hujus. quadratum ad quadratum ex A F r; et F B jungatur.

Quoniam igitur est ut quadratum ex B A ad quadratum ex A F, ita D C ad C E; habebit quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem eam, quam numerus D C ad C E numerum. Ergo quadratum ex B A quadrato ex A F est commensurabile.



ſurabile [s]. Sed rationale eſt quadratum ex A B [t]: ergo et quadratum ex A F rationale erit [u]; ac propterea recta linea A F eſt rationalis [x]. Et quoniam D C ad C E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum [y], neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt recta linea B A ipſi A F longitudine [z]: ergo A B, A F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [a]. Quod cum ſit ut D C ad C B, ita quadratum ex B A ad quadratum ex F A; erit per converſionem rationis ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F [b]. Sed C D ad D E rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ob id recta linea A B ipſi B F longitudine eſt commenſurabilis [z]. Atque eſt quadratum ex A B æquale quadratis ex A F, F B: ergo A B plus poteſt quam A F, quadrato rectæ lineæ B F ſibi commenſurabilis longitudine.

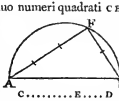
s 6. hujus.
t Def. 8. hujus.
u Def. 9. hujus.
x Def. 6. hujus.
y Per conſtruct.
z 9. hujus.
a Def. 3. hujus.
b Cor. 19. quinti, & 47. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles B A, A F, ita ut major B A plus poteſt quam minor A F, quadrato ipſius F B, ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

## PROP. XXXI. PROBL. [XXXI.]

*Invenire duas rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.*

Exponatur rationalis A B, et duo numeri quadrati C E, E D, ita ut C D, qui ex ipſis componitur, non ſit quadratus [c]; atque ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B deſcribatur, et fiat ut D C ad C E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex A F [d], et jungatur F B. Similiter quidem oſtendemus, ut in antecedente, A B, A F rationales eſſe potentiâ ſolum commenſurabiles. Et quoniam eſt ut D C ad C E, ita quadratum ex B A ad id quod ex A F quadratum; erit per converſionem rationis




c Lemma 5. hujus.
d Cor. 6. hujus.

 ut

ut C D ad D E, ita quadratum ex A B ad quadratum ex B F. Sed C D ad D E rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum [f]. Non igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B F rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo A B ipsi B F longitudine est incommensurabilis [g]. Et A B plus potest quam A F quadrato rectæ lineæ F B, sibi longitudine incommensurabilis. *Q. E. F.*

f Per construct.

g 9. hujus.

## [XXXII.] PROP. XXXII. PROBL.

*Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.*




Exponantur duæ rationales potentiâ solum commensurabiles A, B, ita ut A major plus possit quam B minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [h]. Et sit rectangulo sub A, B æquale quadratum, quod sit a rectâ lineâ C. Media igitur est recta C [i]. Quadrato vero, quod sit ex B, æquale sit rectangulum sub C, D; rationale autem est quod ex B: ergo et rectangulum sub C, D est rationale. Et quoniam est ut A ad B, ita rectangulum sub A, B ad quadratum ex B; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex C, quadrato autem ex B æquale rectangulum sub C, D [k]: erit ut A ad B, ita quadratum ex C ad rectangulum sub C, D. Sed ut quadratum ex C ad rectangulum C, D, ita recta linea C ad ipsam D: ut igitur A ad B, ita C ad D. Commensurabilis autem est A ipsi B potentiâ solum: ergo et C ipsi D potentiâ solum est commensurabilis [l]. Atque est C media: media igitur est et D [m]. Et quoniam est ut A ad B, ita C ad D, et A plus potest quam B quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et C plus poterit quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis [n].

h 30. hujus.

i 22. hujus.

k Per construct.

l 10. hujus.

m 24. hujus.

n 15. hujus.

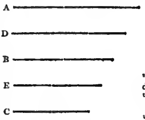
Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles C, D, quæ rationale continent, et C plus potest quam D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. *Q. E. F.*

Similiter

Similiter autem oſtendetur, inveniri poſſe duas medias, potentiâ ſolum commenſurabiles, et continentes rationale, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Id enim efficietur, ſi A plus poſſit quam B quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

## PROP. XXXIII. PROBL. [XXXIII.]

*Invenire duas medias potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.*



Exponantur tres rationales A, B, C potentiâ ſolum commenſurabiles, quarum A plus poſſit quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; et ſit rectangulo ſub ipſis A, B æquale quadratum, quod ſit ex D [s]. Itaque recta linea D media [t]. Rectangulo autem ſub B, C æquale ſit rectangulum ſub D, E [u]. Quoniam igitur eſt ut rectangulum ſub A, B ad rectangulum ſub B, C, ita recta linea A ad ipſam C [x]; ſed rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quod ſit ex D quadratum, rectangulo autem ſub B, C æquale rectangulum ſub D, E; erit ut A ad C, ita quadratum ex D ad rectangulum ſub D, E. Sed ut quadratum ex D ad rectangulum ſub D, E, ita D ad E [z]; et igitur ut A ad C, ita D ad E. Commenſurabilis autem eſt A ipſi C potentiâ ſolum [y]: ergo et D ipſi E potentiâ ſolum eſt commenſurabilis [z]. Atqui eſt D media: media igitur eſt et E [a]. Itaque quoniam eſt ut A ad C, ita D ad E, et A plus poteſt quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; et D plus poterit quam E quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine [b]. Dico præterea rectangulum ſub D, E medium eſſe. Quoniam enim rectangulo ſub B, C æquale eſt rectangulum ſub D, E [y]; medium autem eſt quod ſub B, C [c]: ergo et quod ſub D, E medium erit.

[s] 14. ſecundi.
[t] 22. hujus.
[u] 45. primi.
[x] 1. ſexti.
[y] Per conſtruct.
[z] 10. hujus.
[a] 24. hujus.
[b] 15. hujus.
[c] 22. & Def. 12. hujus.

Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles D, E, quæ medium contineant; ita ut

 major

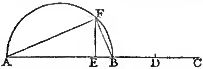
major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. *Q. E. F.*

Rurſus ſimiliter oſtenditur, quomodo inveniantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles et medium continentes, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Id enim efficietur, ſi A plus poſſit quam C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. PROBL.

*Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium.*

Exponantur duæ rationales potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, ita ut major A B plus poſſit quam minor B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incom-




[e] 31. hujus. menſurabilis [e]; et recta B C ſecta ſit bifariam ad D; et quadrato, quod fit ab alterutrâ ipſarum B D, D C, æquale parallelogrammum ad rectam lineam A B applicetur, de-
[f] 28. ſexti. ficiens figurâ quadratâ [f], et ſit quod continetur ſub A E, E B; et deſcribatur ſuper rectam lineam A B ſemicirculus A F B, ducaturque ipſi A B ad rectos angulos E F; et A F, F B jungantur: quæ, propter ſemicirculum, angu-
[g] 31. tertii. lum A F B rectum continebunt [g].

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ A B, B C inæquales ſunt, et A B plus poteſt quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori B C, hoc eſt, quadrato dimidiæ ipſius, æquale parallelogrammum applicatum eſt ad A B, deficiens figurâ quadratâ, quod quidem ſub A E, E B
[h] 19. hujus. continetur; erit A E ipſi E B incommenſurabilis [h]. Et quoniam eſt ut A E ad E B, ita rectangulum ſub B A,
[i] 1. ſexti. A E ad rectangulum ſub A B, B E [i]; rectangulum autem ſub A B, A E, quadrato ex A F eſt æquale, et rectangulum ſub

ſub A B, B E æquale quadrato ex B F[k]; quadratum igitur ex A F incommenſurabile eſt quadrato ex F B: ideoque rectæ lineæ A F, F B potentiâ ſunt incommenſurabiles. Et quoniam A B rationalis eſt, et quadratum, quod ſit ex A B, erit rationale: ergo et rationale compoſitum ex quadratis ipſarum A F, F B. Nimirum cum ex quadratis illis compoſitum ſit quadratum ipſum ex A B[l]. Rurſus, quoniam rectangulum ſub A E, E B eſt æquale quadrato ex E F[k], ponitur autem rectangulum ſub A E, E B quadrato etiam ex B D æquale: ergo F E eſt æqualis B D: ac propterea B C ipſius E F eſt dupla. Rectangulum igitur ſub A B, B C duplum eſt rectanguli ſub A B, E F[m]. Sed rectangulum ſub A B, B C eſt medium[n]: ergo et medium eſt, quod continetur ſub A B, E F. Eſt autem quod ſub A B, E F continetur æquale contento ſub A F, F B[o]. Nimirum cum utrumque trianguli A F B duplum ſit[p]. Contentum igitur ſub A F, F B medium eſt. Sed et oſtenſum eſt, rationale eſſe quod componitur ex ipſarum quadratis.

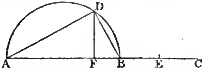
[k] Cor. 8. ſexti.
[l] 47. primi.
[m] 1. ſexti.
[n] 22. & Def. 12. hujus.
[o] Ax. 6. primi.
[p] 41. primi.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A F, F B, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, medium. *Q. E. F.*

## PROP. XXXV. PROBL. [XXXV.]

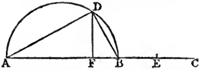
*Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale.*

Exponantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ rationale contineant, ita ut A B plus poſſit quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longi-




tudine incommenſurabilis[q]; et ſuper ipſam A B, deſcribatur ſemicirculus A D B, ſeceturque B C bifariam in E; et applicetur ad A B parallelogrammum æquale quadrato ipſius B E, deficiens figurâ quadratâ[r], et ſit quod continetur

[q] 32. hujus.
[r] 28. ſexti.




continetur ſub A F, F B. Incommenſurabilis igitur
[u] 19. hujus. eſt A F ipſi F B longitudine[u]. A puncto autem F ipſi A B ad rectos angulos ducatur F D, et A D, D B jungantur: quæ, propter ſemicirculum, angulum A D B, rectum continebunt.

Itaque quoniam A F eſt incommenſurabilis ipſi F B, erit et rectangulum ſub B A, A F rectangulo ſub A B, B F
[x] 1. ſexti. & 10. hujus. incommenſurabile[x]. Eſt autem rectangulum quidem ſub B A, A F quadrato ipſius A D æquale; rectan-
[y] Cor. 8. ſexti. gulum vero ſub A B, B F æquale quadrato ipſius D B[y]. Incommenſurabile igitur eſt quadratum ex A D ipſius D B quadrato; ac propterea rectæ lineæ A D, D B potentiâ ſunt incommenſurabiles. Et quoniam eſt medium quadratum ipſius A B, erit et compoſitum ex quadratis ipſarum A D, D B medium. Nimirum cum ex
[z] 47. primi. quadratis illis compoſitum ſit quadratum ipſum ex A B[z]. Quod cum dupla ſit B C ipſius D F, et rectangulum ſub
[a] 1. ſexti. A B, B C rectanguli ſub A B, F D duplum erit[a]: quare et commenſurabile. Rationale autem eſt rectangulum ſub A B, B C, ita enim ponitur: ergo et rectangulum ſub A B, F D eſt rationale. Sed rectangulo ſub A B, F D æquale eſt rectangulum ſub A D, D B: nimirum cum
[b] 41. primi. utrumque trianguli A D B duplum ſit[b]. Quare et ipſum ſub A D, D B rectangulum rationale erit.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A D, D B, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero, quod ſub ipſis continetur, rationale. *Q. E. F.*

[XXXVI.]

## PROP. XXXVI. PROBL.

*Invenire duas rectas lineas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant et compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.*

Exponantur duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ medium contineant, ita ut A B plus poſſit quam B C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine

dine incommensurabilis [b]; et super A B semicirculus A D B [b] describatur, et reliqua fiant, ut in iis quæ superius dicta sunt. 33. hujus.

Quoniam igitur A F incommensurabilis est ipsi F B longitudine, erit et A D ipsi D B potentiâ incommensurabilis. Et quoniam medium est, quod fit ex A B, et compositum ex quadratis ipsarum D A, D B est medium. Quod cum rectangulum sub A F, F B æquale sit quadrato alterutrius ipsarum B E, D F, erit D F æqualis B E; ac propterea B C ipsius F D dupla. Rectangulum igitur sub A B, B C duplum est ejus, quod sub A B, F D continetur. Medium autem est rectangulum sub A B, B C [c]: ergo et quod continetur sub A B, F D est medium: atque est æquale contento sub A D, D B. Quare et ipsum sub A D, D B rectangulum medium erit. Et quoniam incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, commensurabilis autem C B ipsi B E; erit et A B ipsi B E longitudine incommensurabilis: ergo et quadratum ex A B incommensurabile est rectangulo sub A B, B E [d]. Sed quadrato quidem ex A B æqualia sunt quæ ex A D, D B sunt quadrata; rectangulo autem sub A B, B E æquale est rectangulum sub A B, F D, hoc est, rectangulum sub A D, D B. Compositum igitur ex quadratis ipsarum A D, D B rectangulo sub A D, D B est incommensurabile.

c ex hyp.
d 1. sexti. & 10. hujus.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum quod sub ipsis continetur medium, et adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. *Q. E. F.*

*Principium*

# *Principium Senariorum per Compositionem.*

SCHOLION. *

Monitos Tyrones velim non omnia, quæ Junioribus fermone Algebraico Surdorum nomine veniunt, apud Veteres ἄλογα, Latinè irrationalia, nuncupari. Etenim illi rectas omnes, quæ expofitæ cuidam ῥητῇ, id eft, rationali, feu effabili potius, five longitudine five potentiâ tantum, commenfurabiles effent, ῥητὰς feu effabiles ftatuerunt: cum nobis furdæ fint, quæcunque ipfi expofitæ non funt ipfâ longitudine commenfurabiles. Quæ vero tam potentiâ quam longitudine incommenfurabiles effent, eas demum Veteres ἀλόγους, feu irrationales, vocarunt. Quæcunque igitur illis irrationalia, nobis omnino furda funt. Haud item quæ nobis furda, ea omnia Veteribus irrationalia. Nobis fcilicet furda eft radix quadratica binarii; $\sqrt{2}$. Veteribus, effabilis. Vel ut magis geometrice loquamur, pofitâ $a$ effabili, illa quæ poteft $2 . a^2$, five $\sqrt{2} \times a$, nobis furda, illis effabilis. Quæ vero duabus $a$, $\sqrt{2} \times a$ proportione media eft, cum nobis furda tum illis quoque irrationalis. Quadrati diagoniam, pofito latere effabili, nos furdam habemus, quanquam Veteribus effabilem. At fi lateri et diagoniæ capiatur proportione media, ea cum nobis furda tum Veteribus irrationalis. Cum igitur in fequentibus hujufmodi binomia $a + \sqrt{2} . a$, irrationalia effe Euclides ftatuit, hoc fcilicet intelligi vult, ad fimplices radices quadraticas talia non poffe revocari.

[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

*Si duæ rationales, potentiâ folum commenfurabiles, componantur, tota irrationalis erit; vocetur autem ex binis nominibus.*

Componantur enim duæ rationales potentiâ folum commenfurabiles A B, B C: dico A C irrationalem effe.

Quoniam enim incommenfurabilis eft A B ipfi B C longitudine, potentiâ enim folum commenfurabiles funt; et ut A B ad B C, ita rectangulum fub A B, B C ad id quod

fit

ſit ex B C quadratum [e]: erit rectangulum ſub A B, B C [e] 1. ſexti.
quadrato ex B C incommenſurabile [f]. Sed rectangulo [f] 10. hujus.




quidem ſub A B, B C commenſurabile eſt id quod bis ſub A B, B C continetur [g]; quadrato autem ex B C com- [g] 6. hujus.
menſurabilia ſunt quadrata ex A B, B C [h]. Quod igitur [h] 16. hujus.
bis ſub A B, B C continetur, incommenſurabile eſt quadratis ex A B, B C; et componendo, quod bis ſub A B, B C continetur una cum quadratis ex A B, B C, hoc eſt quadratum ex A C [l], incommenſurabile eſt compoſito ex [l] 4. ſecundi.
ipſarum A B, B C quadratis. Rationale autem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C. Ergo quadratum ex A C irrationale eſt; et ob id recta linea A C eſt irrationalis: vocetur autem ex binis nominibus.

## PROP. XXXVIII. THEOR. [XXXVIII.]

*Si duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis prima.*

Componantur enim duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles A B, B C, quæ rationale contineant: dico totam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt A B ipſi B C longitudine, et quadrata ex A B, B C incommenſurabilia erunt rectangulo, quod bis ſub A B, B C continetur [k]. Ergo [k] 13. hujus.




componendo, quadrata ex A B, B C, una cum eo quod bis ſub A B, B C continetur, quod eſt ipſius A C quadratum [l], incommenſurabile eſt rectangulo ſub A B, B C. [l] 4. ſecundi.
Sed rectangulum rationale ponitur. Ergo quadratum ex A C irrationale eſt: igitur et recta linea A C irrationalis: vocetur autem ex binis mediis prima.

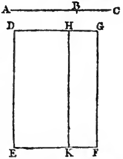
## PROP. XXXIX. THEOR. [XXXIX.]

*Si duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit: vocetur autem ex binis mediis ſecunda.*

Componantur enim duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, A B, B C, quæ medium contineant: dico A C irrationalem eſſe.

Exponatur

Exponatur rationalis D E, et quadrato ex A C æquale parallelogrammum rectangulum D F ad ipsam D E applicetur, latitudinem faciens D G [m]. Itaque quoniam quadratum ex A C æquale est quadratis ex A B, B C et rectangulo quod bis sub A B, B C continetur [n]; applicetur ad ipsam D E quadratis ex A B, B C, æquale parallelogrammum rectangulum E H. Reliquum igitur F H æquale est ei, quod bis sub A B, B C continetur. Et quoniam media est utraque ipsarum A B, B C, erunt et quadrata ex A B, B C media. Medium autem ponitur et quod bis continetur sub A B, B C; atque est quadratis quidem ex A B, B C æquale parallelogrammum E H, rectangulo autem bis sub A B, B C contento æquale est ipsum H F. Medium igitur est utrumque ipsorum E H, H F, et ad rationalem D E applicantur: ergo utraque recta linea D H, H G est rationalis, et ipsi D E longitudine incommensurabilis [o]. Et quoniam incommensurabilis est A B ipsi B C longitudine, atque est ut A B ad B C, ita quadratum ex A B ad rectangulum sub A B, B C [p]; erit quadrato ex A B rectangulum sub A B, B C incommensurabile [q]. Sed quadrato quidem ex A B commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum A B, B C; rectangulo autem sub A B, B C est commensurabile, quod bis sub A B, B C continetur [r]: ergo compositum ex quadratis ipsarum A B, B C incommensurabile erit ei, quod bis continetur sub A B, B C [s]. Sed quadratis ex A B, B C æquale est parallelogrammum E H, et rectangulo quod bis sub A B, B C continetur æquale H F parallelogrammum [t]. Quare E H ipsi H F est incommensurabile; et ob id recta linea D H ipsi H G incommensurabilis longitudine. Ostensæ autem sunt rationales: ergo D H, H G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est irrationalis [u]. Spatium igitur D F est irrationale. Nam si rationale esset, propter D E rationalem, talis enim ponitur, rationalis etiam esset D G [x]. Irrationale igitur est spatium D F, et ideo quæ ipsum potest est irrationalis. Potest autem ipsum D F recta linea A C [t]: ergo A C irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis secunda.




[m] 45. primi.
[n] 4. secundi.
[o] 23. hujus.
[p] 1. sexti.
[q] 10. hujus.
[r] ex hyp.
[s] 14. hujus.
[t] Per construct.
[u] 37. hujus.
[x] 21. hujus.

Cor.

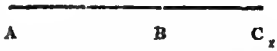
*Cor.* * Quod sub rationali et irrationali continetur rectangulum irrationale est.

## PROP. XL. THEOR. [XL.]

*Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; tota recta linea irrationalis erit: vocetur autem major.*

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim id, quod sub A B, B C continetur, medium est; et quod bis continetur sub A B, B C medium erit [x]: quapropter et irrationale [y]. Compositum autem ex ipsarum A B, B C quadratis est rationale: ergo quod bis sub A B, B C continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum A B, B C; et ob id quadrata ex A B, B C unà cum eo, quod bis sub A B, B C continetur, quod est quadratum ex A C [z], incommensurabile est quadratis ex A B, B C [a]. Rationale autem est compositum ex quadratis A B, B C [b]. Ergo quadratum ex A C irrationale erit; ac propterea recta linea A C est irrationalis, vocetur autem major.



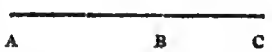

[x] Cor. 24. hujus.
[y] 22. hujus. & Def. 12.
[z] 4. secundi.
[a] 17. hujus.
[b] ex hyp.

## PROP. XLI. THEOR. [XLI.]

*Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.*

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommensurabiles A B, B C, facientes ea, quæ proposita sunt: dico A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis sub A B, B C continetur rationale: erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis incommensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur: quare componendo quadratum ex A C, est incommensurabile ei, quod bis continetur sub A B, B C [c]. Est autem rationale, quod bis sub A B, B C continetur:




[c] 17. hujus.

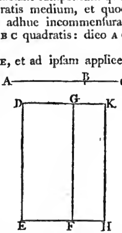
quadratum

quadratum igitur ex A C irrationale eſt. Ideoque recta linea A C eſt irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

[XLII.] PROP. XLII. THEOR.

*Si duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium; et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.*

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles A B, B C, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum A B, B C quadratis: dico A C irrationalem eſſe.




Exponatur enim rationalis D E, et ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum D F æquale quadratis ipſarum A B, B C, et parallelogrammum G H æquale ei, quod bis ſub A B, B C continetur[e]. Totum igitur D H quadrato ipſius A C eſt æquale[f]. Et quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C, et æquale parallelogrammo D F; erit ipſum quoque D F medium, et ad rationalem D E applicatum eſt. Rationalis igitur eſt D G, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis[g]. Ob eandem cauſam et G K eſt rationalis, et incommenſurabilis longitudine ipſi F G, hoc eſt, ipſi D E. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur; erit et parallelogrammum D F ipſi H G incommenſurabile: ergo et recta linea D G incommenſurabilis eſt ipſi G K[h]. Et ſunt rationales: quare D G, G K rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D K eſt irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur[i]. Rationalis autem D E: ergo parallelogrammum D H irrationale eſt[k], et ipſum

[e] 45. primi.
[f] 4. ſecundi.
[g] 23. hujus.
[h] 1. ſexti. & 10. hujus.
[i] 37. hujus.
[k] Cor. 39. hujus.

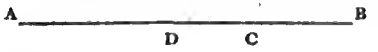
ſum potens irrationalis. Sed ipſum D H poteſt recta linea A C [n]; quare A C irrationalis eſt, vocetur autem bina media potens. [n] Per conſtruct.

*Cor.* * Omnis diviſio rectæ in nomina ſit extra punctum diviſionis mediæ.

### PROP. XLIII. THEOR. [XLIII.]

*Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit ex binis nominibus A B diviſa in nomina ad punctum C: ergo A C, C B rationales ſunt potentiâ ſolum



commenſurabiles. Dico A B ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ ſolum commenſurabiles.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D, ita ut A D, D B rationales ſint potentiâ ſolum commenſurabiles. Manifeſtum eſt rectam A B, in utroque puncto C, D inæqualiter dividi. Haud enim potentiâ tantum commenſurabilia eſſent ſegmenta, ſi in æqualia diviſio fieret. Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipſarum A D, D B quadratis, hôc differt et quod bis ſub A D, D B continetur ab eo, quod bis continetur ſub A C, C B; quoniam et quadrata rectarum linearum A C, C B, unà cum eo, quod bis continetur ſub A C, C B, et quadrata ipſarum A D, D B, unà cum eo quod bis ſub A D, D B continetur, æqualia ſunt quadrato ipſius A B [o]. [o] 4. ſecundi.
Sed quadrata ipſarum A C, C B a quadratis ipſarum A D, D B differunt rationali, etenim rationalia utraque ſunt: ergo et quod bis ſub A D, D B continetur a contento bis ſub A C, C B differt rationali; cum ipſa media ſint. Atqui medium non ſuperat medium rationali [p]. Non igitur [p] 27. hujus.
quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. Q. E. D.

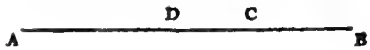
### PROP. XLIV. THEOR. [XLIV.]

*Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit ex binis mediis prima A B diviſa in puncto C, ita ut A C, C B mediæ ſint potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur etiam in D, ita ut A D,

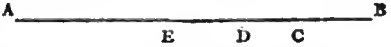
D B




D B sint mediæ potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis sub A D, D B ab eo, quod bis sub A C, C B continetur, hôc differunt etiam quadrata rectarum linearum A C, C B ab ipsarum A D, D B quadratis; rationali autem differt contentum bis sub A D, D B ab eo, quod bis sub A C, C B continetur, utraque enim sunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipsarum A C, C B a quadratis ipsarum A D, D B, existentia utra-
[q] 27. hujus. que media. Illud autem fieri non potest [q]. Non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur necesse est. *Q. E. D.*

## * LEMMA VI.

Recta quævis linea A B, in punctis C, D utcunque secetur; ita tamen ut in neutro media dividatur. Segmentorum inæqualium A C, C B sit A C majus. Inæ-




qualium item A D, D B sit A D majus. Denique duorum A C, A D sit A C majus. Dico quadrata ex A C, C B simul sumpta quadratis ex A D, D B simul sumptis esse majora.

Media enim dividatur recta A B puncto E. Jam cum
[r] ex hyp. recta A C major est quam A D [r], ablatâ communi A E, erit E C major quam E D, et quadratum ex E C quadrato ex E D majus. Illud igitur, quo quadratum ex E B superat quadratum ex E C, minus erit illo quo quadratum idem ex E B superat quadratum ex E D. Sed rectangulum sub A C, C B illud est, quo quadratum ex E B superat quadratum ex E C; et rectangulum sub A D, D B illud est, quo quadratum idem ex E B superat quadratum
[s] 5. secundi. ex E D [s]. Rectangulum igitur sub A C, C B rectangulo sub A D, D B minus. Quapropter et duplum rectanguli sub A C, C B duplo rectanguli sub A D, D B minus erit. Illud igitur quo quadratum ex A B superat duplum rectanguli sub A C, C B majus erit illo, quo quadratum idem ex A B superat duplum rectanguli sub A D, D B. Sed quadratum ex A B superat duplum rectanguli sub A C, C B quadratis ex A C, C B simul sumptis; et quadratum

dratum idem ex A B superat duplum rectanguli sub A D, D B, quadratis ex A D, D B simul sumptis[t]. Quadrata igitur ex A C, C B simul sumpta quadratis ex A D, D B simul sumptis sunt majora. *Q. E. D.* [t] 4. secundi.

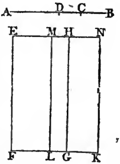
*Cor.* * Iisdem positis, dico quadrata ex A D, D B simul sumpta duplo rectanguli sub A C, C B majora esse.

Nam quadrata ex A D, D B simul sumpta duplo quadrati ex E B sunt majora[u]. Sed rectangulum sub A C, C B quadrato ex E B minus est[x]. Quare et duplum rectanguli sub A C, C B duplo quadrati ex E B minus. Quadrata igitur ex A D, D B simul sumpta duplo rectanguli sub A C, C B multo sunt majora. Pari ratione quadrata ex A C, C B simul sumpta duplo rectanguli sub A D, D B sunt majora. [u] 9. secundi. [x] 5. secundi.

## PROP. XLV. THEOR. [XLV.]

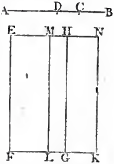
*Quæ ex binis mediis secunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit ex binis mediis secunda A B divisa in nomina in puncto C; ita ut A C, C B mediæ sint, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant. Dico ipsam A B in alio puncto præter C, in nomina non dividi.




Dividatur enim, si fieri potest, in alio puncto D, ita ut A D, D B mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, quæ medium contineant. Duarum autem A C, C B, necessario utique inæqualium, major sit A C. Duarum item A D, D B, necessario inæqualium, major sit A D. Duarum A C, A D inæqualium altera major erit. Sit A C major. Constat igitur quadrata ex A C, C B simul sumpta quadratis ex A D, D B simul sumptis esse majora[y]. Exponatur rationalis E F; et quadrato quidem ex A B æquale parallelogrammum E K ad ipsam E F applicetur; quadratis vero ex A C, C B æquale auferatur E G. Reliquum igitur H K æquale est ei, quod bis sub A C, C B continetur[z]. Rursus, quadratis ex A D, D B, quæ minora sunt quadratis ex A C, C B, ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur [y] Lemma 6. [z] 4. secundi.

E L: ergo reliquum M K est æquale ei, quod bis continetur sub A D, D B. Et quoniam media sunt et commensurabilia quæ ex A C, C B quadrata, erit E G medium; et ad rationalem E F applicatum est: quare E H rationalis est, et ipsi E F longitudine




[t 23. hujus.] incommensurabilis [t]. Eâdem ratione et H N est rationalis, et ipsi E F incommensurabilis longitudine. Quod cum A C, C B mediæ sint potentiâ solum commensurabiles; erit A C ipsi C B incommensurabilis longitudine. Ut autem A C ad C B, ita quadratum ex

[u 1. sexti.] A C ad id quod sub A C, C B continetur [u]: quadratum igitur ex A C incommensurabile est ei, quod contine-

[x 10. hujus.] tur sub A C, C B [x]. Sed quadrato quidem ex A C commensurabilia sunt quadrata ex A C, C B, etenim A C, C B

[y 16. hujus.] potentiâ sunt commensurabiles [y]; ei vero quod continetur sub A C, C B commensurabile est illud, quod bis sub A C, C B continetur. Ergo et quadrata ex A C, C B incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A C, C B continetur. Quadratis autem ex A C, C B æquale est parallelogrammum E G, et ei quod bis continetur sub A C, C B æquale est H K: ergo E G ipsi H K est incommensurabile; et ob id recta linea E H ipsi H N incommensurabilis longitudine, suntque rationales: ergo E H, H N rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solum commensurabiles componantur; tota irrationalis est, quæ ex binis

[z 37. hujus.] nominibus appellatur [z]: quare E N ex binis nominibus est divisa in puncto H. Eâdem ratione et E M, M N ostendentur rationales potentiâ solum commensurabiles. Diversa autem erunt puncta M et H. Rectangulum enim E G, quod quadratis ex A C, C B factum est æquale, majus erit rectangulo E L, quadratis ex A D, D B æquali; ac propterea rectæ E M, E H inæquales. Recta igitur E N ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum divisa erit in nomina, videlicet ad H et

[a 43. hujus.] ad M. Quod fieri nequit [a]; nisi forte E N ita sit divisa in punctis illis, ut segmenta alternè sint æqualia: nempe ut E M æquale sit ipsi H N, et N M ipsi E H. Hoc autem fieri

fieri nequit. Nam ſi fiat, rectangulum E L æquale erit rectangulo H K. Sed rectangulum E L æquale eſt quadratis ex A D, D B ſimul ſumptis, et rectangulum H K duplum eſt rectanguli ſub A C, C B[b]. Quare quadrata ex A D, D B ſimul ſumpta duplo rectanguli ſub A C, C B erunt æqualia. Quod eſt abſurdum. Cum quadrata duplo rectanguli ſunt majora[c]. Recta igitur ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina. Q. E. D.

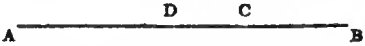
[b] ex conſtruct. [c] Cor. Lem. 6.

## PROP. XLVI. THEOR. [XLVI.]

*Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit major A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D, ita ut A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem




ſub ipſis continetur medium. Et quoniam quo differunt quadrata ex A C, C B a quadratis ex A D, D B; hoc differt et id, quod bis continetur ſub A D, D B, ab eo, quod bis ſub A C, C B continetur[b]; ſed quadrata ex A C, C B ſuperant quadrata ex A D, D B rationali, etenim utraque rationalia ſunt: ergo quod bis continetur ſub A D, D B rationali ſuperat id, quod bis ſub A C, C B continetur; quod eſt impoſſibile, cum media ſint[c]. Non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur in nomina. Ergo ad idem duntaxat dividatur neceſſe eſt. Q. E. D.

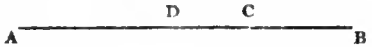
[b] 4. ſecundi. [c] 27. hujus.

## PROP. XLVII. THEOR. [XLVII.]

*Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit rationale ac medium potens A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A C, C B quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: dico A B in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D; ita ut etiam A D, D B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub




ipſis continetur rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum ſub A D, D B ab eo, quod bis ſub A C, C B continetur, hoc differunt et quadrata [d] 4. ſecundi. ex A C, C B a quadratis ex A D, D B [d]; rectangulum autem bis contentum ſub A D, D B rationali ſuperat id, quod bis ſub A C, C B continetur: ergo et quadrata ex A C, C B ſuperant quadrata ex A D, D B rationali; quod eſt [e] 27. hujus. impoſſibile; cum media ſint [e]. Non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

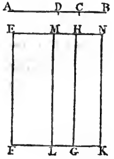
[XLVIII.]

## PROP. XLVIII. THEOR.

*Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.*

Sit bina media potens A B diviſa in C; ita ut A C, C B potentiâ incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis medium; et quod ſub ipſis continetur medium; et adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile rectangulo ſub ipſis: dico A B ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, dividatur in D; ita ut A D, D B potentiâ ſint incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et rectangulum ſub ipſis medium, et compoſito ex quadratis incommenſurabile. Duarum autem A C, C B, neceſſario inæqualium, major ſit A C. Duarum item A D, D B major A D. Duarum denique A C, A D ſit major A C. Exponaturque rationalis E F, et ad ipſam E F quadratis quidem ex A C, C B æquale parallelogrammum E G applicetur; rectangulo autem bis con-




tento

tento sub A C, C B æquale applicetur H K. Totum igitur E K est æquale ei quod fit ex A B quadrato[f]. Rursus ad E F applicetur parallelogrammum E L æquale quadratis ex A D, D B: ergo reliquum quod bis sub A D, D B continetur reliquo M K est æquale[f]. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum A C, C B medium ponitur; erit et parallelogrammum E G medium; et ad rationalem E F applicatum est. Rationalis igitur est H E, et ipsi E F longitudine incommensurabilis[g]. Eadem ratione et H N est rationalis, ipsique E F incommensurabilis longitudine. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum A C, C B incommensurabile est ei, quod bis sub A C, C B continetur[h], erit et parallelogrammum E G ipsi H K incommensurabile: ergo et recta linea E H incommensurabilis est rectæ H N[i]. Et sunt rationales: quare E H, H N rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; et ob id E N ex binis nominibus est, divisa in puncto H. Similiter ostendemus ipsam in puncto quoque M dividi. Diversa autem esse puncta M, H eodem modo quo in Prop. xlv. ostendamus: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur; quod est absurdum[k]. Non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum. Quare ad unum duntaxat punctum dividetur. *Q. E. D.*

[f] 4. secundi.
[g] 23. hujus.
[h] ex hyp.
[i] 10. hujus.
[k] 43. hujus.

## DEFINITIONES SECUNDÆ.

### DEFINITIO I.

Exposità rationali, et ex binis nominibus quâdam, cujus majus nomen plus possit quam minus quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, in nomina divisâ: si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

### II.

Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

III.

Quod ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

IV.

Rurſus ſi majus nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quidem majus nomen expoſitæ rationali ſit commenſurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

V.

Si vero minus, dicatur quinta.

VI.

Quod ſi neutrum, dicatur ſexta.

SCHOLION.*

Literis $a$, $b$, $c$, &c. ſignificentur rectæ lineæ rationales, expoſitæ cuidam ῥητῇ, literâ $\rho$ ſignificandæ, longitudine commenſurabiles. Literis autem $m$, $n$, $p$, &c. ſignificentur numeri, qui neque quadrati ſint, neque quadratorum numerorum inter ſe rationes habeant.

His poſitis, quæcunque linea recta hiſce notis $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, vel aliis harum ſimilibus, Algebraice deſignatur, rationalis eſt; ipſi $\rho$, et aliis $a$, $c$, &c. potentiâ tantum commenſurabilis. Et ſi duæ ſint rectæ, formulis ejuſmodi ſignificatæ, $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b$, $\sqrt{\frac{p}{q}}\, a$, inter ſe etiam potentiâ, ſed potentiâ ſolum, commenſurabiles erunt; niſi forte coefficientes, qui ſunt ſub ſigno radicali, numerorum inter ſe rationem gerant. Quod ſi evenerit, rectæ longitudine inter ſe commenſurabiles erunt, quamquam utraque ipſi $\rho$ potentiâ tantum. Ut ſi $m$ ſit 8; $n$, 3; $p$, 27; $q$, 2. Ita enim $\sqrt{\frac{m}{n}} : \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{8 \times 2} : \sqrt{27 \times 3} = 4 : 9$. Quare $\sqrt{\frac{m}{n}}\, b : \sqrt{\frac{p}{q}}\, a = 4\,b : 9\,a$. Et cum $b$, $a$ rationales ſint longitudine commenſurabiles, et $4\,b$ longitudine

gitudine commenſurabilis ſit ipſi $b$, necnon $9\,a$ ipſi $a$; omnino erunt $4\,b$, $9\,a$ longitudine commenſurabiles.

2. Quæcunque linea recta hiſce notis $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\;b$, vel aliis harum ſimilibus, Algebraice deſignatur, irrationalis eſt, ſed media. Recta enim $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\,.\,b$ poteſt ſpatium $\sqrt{\frac{m}{n}}\,.\,b^2$ ſive rectangulum ſub rectis $\sqrt{\frac{m}{n}}\,b$, et $b$: quæ rectæ rationales ſunt, potentiâ tantum commenſurabiles. Quod ſi duæ ſint rectæ, formulis ejuſmodi ſignificatæ, $\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\;b$, $\sqrt[4]{\frac{p}{q}}\;a$, etiam inter ſe potentiâ erunt incommenſurabiles. Niſi forte coefficientes, qui ſunt ſub ſigno radicali, in ſe quiſque multiplicati, faciant qui numerorum inter ſe rationem habeant. Hoc eſt, niſi $\sqrt{\frac{m}{n}}$ ſit ad $\sqrt{\frac{p}{q}}$, ut numerus ad numerum. Quod ſi evenerit, rectæ illæ inter ſe potentiâ commenſurabiles erunt, quamquam ipſi $\rho$ utraque incommenſurabilis. Quod ſi ipſi duarum coefficientes ſub ſigno radicali numerorum inter ſe rationem habeant; rectæ vel longitudine inter ſe commenſurabiles, quamquam τῇ $\rho$ nedum potentiâ.

Porro ut binominales Euclidæas Algebraice ſiſtamus, literis $a$, $b$, $c$, &c. $m$, $n$, $p$, $q$ quæ prius deſignantibus, per literas Græcas $\mu$, $\nu$, $\pi$, $\sigma$, &c. ſignificentur numeri quilibet quadrati.

Et primum, rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}}\,a$, $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{3}{4}}\,a$ mediæ ſunt, potentiâ tantum commenſurabiles, quæ rationale continent. Prop. xxviii.

2. Rectæ $\overline{\frac{m}{n}}\big|^{\frac{1}{4}}\,a$, $\overline{\frac{p}{q}}\big|^{\frac{1}{2}} \times \overline{\frac{n}{m}}\big|^{\frac{1}{4}}\,a$ mediæ ſunt, potentiâ tantum commenſurabiles, quæ medium continent. Prop. xxix.

3. Numerorum $\nu$, $\mu$ ſit major $\nu$. Numerus autem $\nu - \mu$ non ſit quadratus, cum ipſi $\nu$, $\mu$ ſint quadrati.

Rectæ $a$, $\left.\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right|^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; major autem $a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipſi $a$ longitudine commenſurabilis erit. Prop. xxx.

4. Numerus $\nu+\mu$, ex quadratis $\nu$, $\mu$ compoſitus, non ſit quadratus. Rectæ $a$, $\left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{1}{2}} a$, rationales erunt, potentiâ tantum commenſurabiles; quarum major $a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ ipſi $a$ longitudine incommenſurabilis erit. Prop. xxxi.

5. Poſito rurſus numero $\nu-\mu$ non quadrato, exiſtentibus ipſis $\nu$, $\mu$ quadratis; rectæ $\left.\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right|^{\frac{1}{4}} a$, $\left.\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right|^{\frac{3}{4}} a$ mediæ erunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, et rationale continentes; quarum major $\left.\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right|^{\frac{1}{4}} a$ plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine commenſurabilis erit. Prop. xxxii.

6. Poſito numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{1}{4}} a$, $\left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{3}{4}} a$ mediæ erunt, potentiâ tantum commenſurabiles, et rationale continentes; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, quæ majori longitudine incommenſurabilis erit. Prop. xxxii.

7. Poſito rurſus numero $\nu-\mu$ non quadrato, rectæ $\left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} a$, $\left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} \times \left.\overline{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\right|^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commenſurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ, majori longitudine commenſurabilis. Prop. xxxiii.

8. Poſito autem numero $\nu+\mu$ non quadrato, rectæ $\left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} a$, $\left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} \times \left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{1}{2}} a$, mediæ erunt, potentiâ tantum commenſurabiles, quæ medium continebunt; quarum major plus poterit quam minor quadrato rectæ majori longitudine incommenſurabilis. Prop. xxxiii.

9. Poſito

9. Pofito $\nu + \mu$ non quadrato, exiftentibus $\nu$, $\mu$ quadratis; rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}$ rectæ erunt potentiâ incommenfurabiles, quæ compofitum ex ipfarum quadratis rationale efficient, rectangulum vero, quod fub ipfis continetur, medium. Prop. xxxiv.

10. Rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\overline{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\right|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ potentiâ funt incommenfurabiles, conficientes id, quod ex ipfarum quadratis componitur, medium; rectangulum vero, quod fub ipfis continetur, rationale. Prop. xxxv.

11. Rectæ $\left.\overline{\frac{1}{2}}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left.\overline{\frac{m}{n}}\right|^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}$ rectæ funt potentiâ incommenfurabiles, conficientes id, quod ex ipfarum quadratis componitur, medium; rectangulum etiam, quod fub ipfis continetur, medium, et compofito ex ipfarum quadratis incommenfurabile. Prop. xxxvi.

Ex hifce autem rectis, binas utique conjungendo, exoriuntur binomiorum feries geminæ, quas ἑξάδας Euclides nominavit, pro variis fcilicet rationum, fi ita loqui liceat, fpeciebus, quas in binomiis fuis fex diverfas utraque complexa eft.

*Recenfio Algebraica utriufque* Ἑξάδος *per compofitionem. Per compofitionem autem funt binomia, quorum nomina figno + conjuncta funt.*

*Series Prima.*

I. Ex binis nominibus; $a + \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a + \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II. Ex binis mediis prima; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{4}} a.$

III. Ex binis mediis secunda; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{4}} a.$

IV. Major; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a \times \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}.$

V. Rationale ac medium potens; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}.$

VI. Bina media potens; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \overline{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}}.$

*Series Secunda.*

(Numerorum $\mu$, $\nu$ sit $\nu$ major.)

I. Ex binis nominibus prima; $a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a.$

II. Ex binis nominibus secunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a + a.$

III. Ex binis nominibus tertia; $\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a + \sqrt{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}\, a.$

IV. Ex binis nominibus quarta; $a + \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{2}} a.$

V. Ex binis nominibus quinta; $\left(\frac{\nu+\mu}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} a + a.$

VI. Ex binis nominibus sexta; $\left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{2}} a + \left(\frac{\pi}{\pi+\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} a;$

modo $\frac{\sigma\nu - \mu\pi}{\overline{\nu+\mu} \times \overline{\pi+\sigma}}$ non sit numerus quadratus, neque $\sigma\nu - \mu\pi$ ad $\overline{\nu+\mu} \times \overline{\pi+\sigma}$ numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

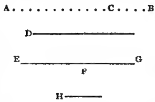
Hæc

Hæc quidem accuratius edifferenda fufcepimus, non quod lucis aliquid Euclidæis acceffurum putaverimus, fi Algebraice expofita effent; quippe quæ, per fe quam maximè perfpicua, caligine potius premuntur fymbolorum involucris conveftita: fed e contrario, in mediis Algebræ tenebris Geometriæ facem accenfuri. Tum ut Algebræ cultores, fi quando Euclidem forte evolvere velint, melius et facilius intelligant, fubtiliffima illa rationalium, irrationalium, mediarumque doctrina quorfum tendat; tum ut mirari inftituantur eximiam illam five perfpicuitatem, five elegantiam, quâcum ille in hoc libro pertractavit, quæ illis, propriâ arte ufis, neglecto tanto præceptore et magiftro, haud fine fudore et moleftiâ calculis eruenda effent.

## PROP. XLIX. PROBL. [XLIX.]

*Invenire ex binis nominibus primam.*

Exponantur duo numeri quadrati A B, B C qui ipfo C A non quadrato differunt [m]. Et exponatur quædam rationalis D, et ipfi D longitudine commenfurabilis fit E F: ergo E F eft rationalis [n]. Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita ipfius E F quadratum ad quadratum F G. Ergo quadratum ipfius E F ad quadratum ipfius F G rationem habebit, quam numerus ad numerum: commenfurabile igitur eft quadratum ex E F quadrato ex F G [p] Atque eft E F rationalis: ergo et rationalis F G. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E F ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo E F ipfi F G incommenfurabilis eft longitudine [q]: et ob id E F, F G rationales funt potentiâ folum commenfurabiles: igitur ex binis nominibus eft E G [r]. Dico et primam effe.




[m] Cor. Lem. 4.

[n] Def. 6. hujus.

[o] Cor. 6. hujus.

[p] 6. hujus.

[q] 9. hujus.

[r] 37. hujus.

Quoniam enim eft ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad id, quod ex F G, quadratum; major autem eft B A quam A C: ergo et quadratum ex

E F quadrato ex F G eſt majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H. Quoniam igitur eſt ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; erit per converſionem rationis ut A B ad B C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex H [s]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; et quadratum igitur ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quare E F ipſi H longitudine eſt commenſurabilis [t]: ideoque E F plus poteſt quam F G quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Sunt autem E F, F G rationales, potentiâ tantum commenſurabiles; et majus nomen E F expoſitæ D longitudine eſt commenſurabile. Ergo E G ex binis nominibus eſt prima [u]. *Q. E. D.*

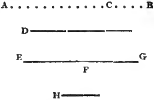
[s] Cor. 19. quinti.
[t] 9. hujus.
[u] Def. Secund. 1. hujus.

[L.]

## PROP. L. PROBL.

*Invenire ex binis nominibus ſecundam.*

Exponantur duo numeri quadrati A B, B C, qui ipſo A C non quadrato differunt [x]. Et exponatur rationalis D, et ſit F G ipſi D longitudine commenſurabilis: ergo F G rationalis eſt. Fiatque ut C A numerus ad numerum A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex F E [y]: commenſurabile igitur eſt quadratum ex G F quadrato ex F E [z]: ergo et F E eſt rationalis [a]. Et quoniam C A numerus ad ipſum A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt G F ipſi F E longitudine [b]: quare E F, F G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea ex binis nominibus eſt E G [c]. Oſtendendum eſt et ſecundam eſſe.




[x] Cor. Lem. 4.
[y] Cor. 6. hujus.
[z] 6. hujus.
[a] Def. 6. hujus.
[b] 9. hujus.
[c] 37. hujus.

Quoniam enim invertendo eſt ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G, major autem eſt B A quam A C: ergo et quadratum ex E F quadrato ex F G eſt majus. Sint quadrato

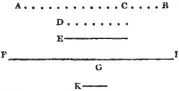
ex

ex E F æqualia quadrata ex F G, H: eſt igitur per converſionem rationis ut A B ad B C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex H [e]. Sed A B ad B C rationem ha- [e] Cor. 19. quinti.
bet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ob id E F ipſi H longitudine eſt commenſurabilis [f]. Quare E F plus poteſt quam F G quadrato [f] 9. hujus.
rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Suntque rationales E F, F G potentiâ ſolum commenſurabiles, et F G minus nomen longitudine commenſurabile eſt ipſi D expoſitæ rationali. Ergo E G eſt ex binis nominibus ſecunda [g]. *Q. E. D.* [g] Def. Secund. 2. hujus.

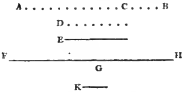
## PROP. LI. PROBL. [LI.]

*Invenire ex binis nominibus tertiam.*

Exponantur ut prius duo numeri quadrati A B, C B, qui ipſo C A non quadrato differunt. Exponatur etiam




alius numerus D non quadratus, qui ad neutrum ipſorum B A, A C rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea E; fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G. Quadratum igitur ex E quadrato ex F G eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt E: ergo et F G eſt rationalis [h]. Et quoniam [h] 6. hujus.
D ad A B rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt E ipſi F G longitudine [i]. Rurſus, fiat ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: ergo quadratum ex F G quadrato ex G H eſt commenſurabile. Rationalis autem eſt F G: quare et G H eſt rationalis. Et quoniam A B ad A C rationem




rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est
[i] 9. hujus. F G ipsi G H longitudine [i]: quare F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles: ideoque F H ex
[k] 37. hujus. binis nominibus est [k]. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut D numerus ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex F G; ut autem B A ad A C, ita quod fit ex F G quadratum ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut D ad A C, ita quadratum ex E ad qua-
[l] 22. quinti. dratum ex G H [l]. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi G H incommensurabilis est longitudine [i]. Et quoniam ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad id quod ex G H quadratum; erit quadratum ex F G majus quadrato ex G H. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: per conversionem igitur rationis est ut A B
[m] Cor. 19. quinti. ad B C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [m]. Sed A B ad B C rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo et quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est F G ipsi K longitudine; et ob id F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensu-
[n] Def. Secund. 3. hujus. rabilis est ipsi E longitudine. Ergo F H est ex binis nominibus tertia [n]. *Q. E. D.*

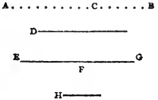
[LII.] PROP. LII. PROBL.

*Invenire ex binis nominibus quartam.*

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis

nalis D, et ipſi D commenſurabilis ſit E F longitudine: ergo E F eſt rationalis.

Fiat autem ut B A numerus ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Commenſurabile igitur eſt quadratum ex E F quadrato ex F G: ideoque recta linea F G eſt rationalis. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit E F ipſi F G longitudine incommenſurabilis[o]. Ergo E F, F G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id E G ex binis nominibus eſt[p]. Dico eam et quartam eſſe. [o] 9. hujus. [p] 37. hujus.

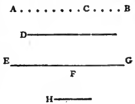



Quoniam enim eſt ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; major autem eſt B A quam A C: erit quadratum ex E F quadrato ex F G majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per converſionem igitur rationis eſt ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id, quod fit ex H, quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F ipſi H longitudine eſt incommenſurabilis: ac propterea E F plus poteſt quam F G quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ ſolum commenſurabiles; et E F ipſi D commenſurabilis eſt longitudine. Ergo E G ex binis nominibus eſt quarta[q]. Q. E. F. [q] Def. Secund. 4. hujus.

## PROP. LIII. PROBL. [LIII.]

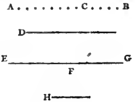
*Invenire ex binis nominibus quintam.*

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipſorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis D, et ipſi longitudine commenſurabilis ſit F G: ergo F G eſt rationalis. Et fiat ut C A ad A B, ita quadratum




ex

ex G F ad id quod fit ex F E quadratum: rationalis igitur est F E. Et quoniam C A numerus ad A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex F E rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo E F, F G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles [r]; et ob id E G ex binis nominibus est [s]. Dico eam et quintam esse.




[r] 9. hujus.
[s] 37. hujus.

Quoniam enim est ut C A ad A B, ita quadratum ex G F ad quadratum ex F E; erit invertendo ut B A ad A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G: ergo quadratum ex E F quadrato ex F G est majus. Sint quadrato ex E F æqualia quadrata ex F G, H: per conversionem igitur rationis est ut A B numerus ad numerum B C, ita quadratum ex E F ad id quod ex H quadratum. Sed A B ad B C rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E F ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea E F ipsi H longitudine est incommensurabilis. Quare E F plus potest quam F G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque E F, F G rationales potentiâ solum commensurabiles, et F G minus nomen expositæ rationali D commensurabilis est longitudine: ergo E G ex binis nominibus est quinta [t]. *Q. E. F.*

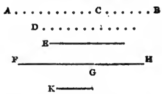
[t] Def. Secund. 5. hujus.

[LIV.]

## PROP. LIV. PROBL.

*Invenire ex binis nominibus sextam.*

Exponantur duo numeri A C, C B, ita ut A B ad neutrum ipsorum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Sit etiam alius numerus D, qui ad neutrum ipsorum B A, A C rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut D ad A B, ita quadratum ex E ad quadratum ex



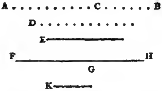

ex F G: commensurabilis igitur est E ipsi F G potentiâ. Atque E est rationalis: quare et rationalis est F G[x]. Et quoniam D ad A B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis[y]. Itaque rursus fiat ut B A ad A C, sic quadratum ex F G ad quadratum ex G H: quadratum igitur ex F G quadrato ex G H est commensurabile. Rationale autem est quadratum ex F G: ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H est rationalis. Et quoniam B A ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine[y]; et ideo F G, G H rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est F H[z]. Ostendendum est et sextam esse.

[x] Def. 6. hujus.

[y] 9. hujus.

[z] 37. hujus.

Quoniam enim ut D ad A B, ita est quadratum ex E ad quadratum ex F G; est autem et ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: ex æquo est ut D, ad A C, ita quadratum ex E ad quadratum ex G H. Sed D ad A C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est E ipsi G H longitudine[y]. Ostensum autem est et ipsi F G incommensurabilem esse: quare utraque ipsarum F G, G H ipsi E longitudine est incommensurabilis. Et quoniam est ut B A ad A C, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit quadratum ex F G quadrato ex G H majus. Sint quadrato ex F G æqualia quadrata ex G H, K: ergo per conversionem ra-




tionis ut A B ad B C, ita est quadratum ex F G ad quadratum ex K. Sed A B ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea F G ipsi K longitudine est incommensurabilis. Ergo F G plus potest quam G H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque F G, G H rationales potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E. Quare F H est ex binis

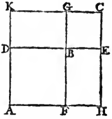
[a] Def. Secund. 6. hujus. nominibus sexta [a]. *Q. E. F.*

LEMMA VII.

Sint duo quadrata A B, B C, et ponantur ita ut D B sit in directum ipsi B E: ergo et F B ipsi B G in directum

[b] 14. primi. erit [b]. Et compleatur A C parallelogrammum. Dico A C quadratum esse; et inter quadrata A B, B C rectangulum D G medium esse proportionale, itemque inter ipsa A C, C B medium proportionale esse D C.

Quoniam enim D B quidem est æqualis F B, B E vero ipsi B G; erit tota D E toti F G æqualis. Sed D E æqualis est utrivis ipsarum K C, A H; et F G utrivis ipsarum A K, H C est æqualis. Ergo et utravis A H, K C utrivis A K, H C est æqualis; æquilaterum igitur est A C parallelogrammum. Est autem et rectangulum: ergo quadratum est A C. Et quoniam est ut F B ad B G, ita D B ad B E; ut autem F B ad B G, ita A B ad D G,




[c] 1. sexti. et ut D B ad B E, ita D G ad B C [c]: ut igitur A B ad D G,

[d] 11. quinti. ita est D G ad B C [d]: ideoque inter A B, B C medium proportionale est D G. Dico præterea inter ipsa A C,

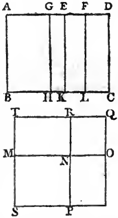
C B

CB medium proportionale esse DC. Nam cum sit ut AD ad DK, ita KG ad GC, est enim utraque utrique æqualis; et componendo erit ut AK ad KD, ita KC ad CG. Sed ut AK ad KD, ita AC ad CD; et ut KC ad CG, ita DC ad CB [d]. Et igitur ut AC ad CD, ita est DC ad CB. Ac propterea inter ipsa AC, CB medium proportionale est CD. *Q. E. D.* [d] 1. sexti.

## PROP. LV. THEOR. [LV.]

*Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus primâ; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.*

Spatium enim ABCD contineatur sub rationali AB, et ex binis nominibus primâ AD: dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur.




Quoniam enim AD est ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum E; et sit AE majus nomen. Manifestum est AE, ED rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et AE plus posse quam ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [e]; et præterea ipsam AE expositæ rationali AB longitudine commensurabilem esse. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur AE plus potest quam ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; si quartæ parti quadrati, quod fit a minori, hoc est, si quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ad majorem AE applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet [f]. Applicetur igitur ad AE quadrato ipsius EF æquale rectangulum sub AG, GE [g]: ergo AG ipsi GE longitudine est commensurabilis. Deinde per puncta G, E, F alterutri ipsarum AB, DC parallelæ ducantur GH, EK, FL; et parallelogrammo quidem AH æquale quadratum constituatur SN; paral-

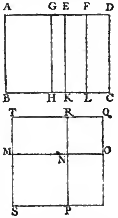
[e] Def. Secund. 1. hujus.

[f] 18. hujus.

[g] 28. sexti.

 lelogrammo

lelogrammo autem G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N sit in directum ipsi N O[h]: ergo R N ipsi N P in directum erit[i]. Et parallelogrammum S Q compleatur: quadratum igitur est S Q[k]. Et quoniam rectangulum sub A G, G E est æquale quadrato ex E F, erit ut A G ad E F, ita E F ad E G[l]: quare ut A H ad E L, ita est E L ad K G[m]: ac propterea inter parallelogramma A H, G K medium proportionale est E L. Sed parallelogrammo A H æquale est quadratum S N, et G K æquale quadrato N Q[n]: ergo inter quadrata S N, N Q medium proportionale est E L. Sed inter eadem S N, N Q medium proportionale est M R[o]: æquale igitur est M R ipsi E L. Sed M R est æquale P O[p], et E L ipsi F C[q]: ergo totum E C ipsis M R, P O est æquale. Sunt autem et A H, G K æqualia ipsis S N, N Q: totum igitur A C est æquale toti S Q, hoc est, quadrato ex M O; ideoque ipsa M O potest parallelogrammum A C. Dico M O ex binis nominibus esse. Quoniam enim A G commensurabilis est ipsi G E; erit A E utrique ipsarum A G, G E commensurabilis[r]. Ponitur autem et A E commensurabilis ipsi A B longitudine: ergo et A G, G E ipsi A B commensurabiles sunt[s]. Atque est A B rationalis: rationalis igitur est et utraque ipsarum A G, G E; et ob id rationale utrumque ipsorum A H, G K[t], et A H ipsi G K est commensurabile[u]. Sed A H est æquale ipsi S N, et G K ipsi N Q: ergo et quadrata S N, N Q, videlicet, quæ fiunt ex M N, N O, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est A E ipsi E D longitudine, et A E quidem est commensurabilis ipsi A G, et D E commensurabilis ipsi E F; erit et A G ipsi E F longitudine incommensurabilis: ergo et A H est incommensurabile ipsi E L. Sed A H est æquale S N, et E L ipsi M R: quare S N est incommensurabile ipsi M R. Ut autem S N ad M R, ita P N ad N R: incommensurabilis




h 14. secundi.
i 14. primi.
k Lemma 7. hujus.
l 17. sexti.
m 1. sexti.
n Per construct.
o Lemma 7.
p 43. primi.
q 36. primi.
r 16. hujus.
s 12. hujus.
t 20. hujus.
u 10. hujus.

bilis igitur eſt P N ipſi N R longitudine [a]. Eſt autem P N æqualis M N, et N R ipſi N O: ergo M N ipſi N O longitudine eſt incommenſurabilis. Atque eſt quadratum ex M N commenſurabile quadrato ex N O; et utrumque rationale. Nimirum cum rectangulis A H, G K, rationalibus et inter ſe commenſurabilibus, quadrata illa, ex M N, N O, ſingulatim ſint æqualia. Quare M N, N O rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ideoque M O ex binis nominibus eſt, et poteſt parallelogrammum A C [x]. *Q. E. D.*

[a] 10. hujus.
[x] 37. hujus.

PROP. LVI. THEOR. [LVI.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſecundâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur.*

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſecundâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A C poteſt, ex binis mediis primam eſſe.

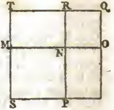
Vide fig. Prop. 55.

Quoniam enim A D eſt ex binis nominibus ſecunda, dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen. Ergo A E, E D rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [y], et A E plus poteſt quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, et minus nomen E D commenſurabile eſt ipſi A B longitudine. Secetur E D bifariam in F; et quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad rectam lineam A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum nempe ſub A G, G E. Commenſurabilis igitur eſt A G ipſi G E longitudine [z]. Et per puncta G, E, F ipſis A B, D C parallelæ ducantur G H, E K, F L; parallelogrammo autem A H æquale quadratum S N conſtituatur, et parallelogrammo G K æquale quadratum N Q. Ita autem ponantur quadrata S N, N Q, ut M N ſit in directum ipſi N O: ergo et R N ipſi N P in directum erit. Et compleatur S Q quadratum: manifeſtum igitur eſt ex iis quæ demonſtrata ſunt [a], parallelogrammum M R medium eſſe proportionale inter quadrata S N, N Q, et parallelogrammo E L æquale; et præterea rectam lineam M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum igitur eſt ipſam M O ex binis mediis primam eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt A E ipſi E D longitudine, commenſurabilis autem E D ipſi A B [b]; erit A E ipſi A B longitudine incommenſurabilis [c]. Et quoniam A G commenſurabilis eſt longitudine ipſi G E;

[y] Def. Secund. 2. hujus.
[z] 18. hujus.
[a] In antec.
[b] 37. hujus.
[c] 14. hujus.

G E; erit A E utrique ipſarum A G, G E longitudine commenſurabilis [d]. Atque eſt A E rationalis: rationalis igitur et utraque A G, G E. Quod cum A E ſit incommenſurabilis quidem ipſi A B longitudine, commenſurabilis autem A E utrique ipſarum A G, G E; erunt A G, G E ipſi A B longitudine incommenſurabiles: quare B A, A G, G E rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Medium igitur eſt utrumque parallelogrammorum A H, G K [e]; et ob id utrumque quadratorum S N, N Q eſt medium: ergo rectæ lineæ M N, N O mediæ ſunt. Rurſus, quoniam commenſurabilis eſt A G ipſi G E longitudine; erit parallelogrammum A H parallelogrammo G K commenſurabile [f]; hoc eſt, quadratum S N ipſi N Q; hoc eſt, quadratum ex M N quadrato ex N O. Ergo M N, N O potentiâ commenſurabiles ſunt. Et quoniam incommenſurabilis eſt A E ipſi E D longitudine, et A E quidem eſt commenſurabilis ipſi A G, E D vero ipſi E F: erit A G ipſi E F longitudine incommenſurabilis. Quare et parallelogrammum A H incommenſurabile parallelogrammo E L, hoc eſt, S N ipſi M R. Quare et recta P N ipſi N R [g], hoc eſt, M N ipſi N O, incommenſurabilis eſt longitudine. Oſtenſæ autem ſunt M N, N O, et mediæ, et potentiâ commenſurabiles: ergo M N, N O mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles. Dico et rationale continere. Quoniam enim D E ponitur commenſurabilis utrique ipſarum A B, E F; erit E F ipſi E K longitudine commenſurabilis. Atque eſt rationalis utraque ipſarum: rationale igitur eſt parallelogrammum E L [h], hoc eſt, M R; eſtque M R quod ſub M N, N O continetur. Si autem duæ mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur [i]. Ergo M O ex binis mediis eſt prima. *Q. E. D.*




[d] 16. hujus.

[e] 22. hujus.

[f] 1. ſexti, & 10. hujus.

[g] 1. ſexti.

[h] 20. hujus.

[i] 38. hujus.

PROP.

## PROP. LVII. THEOR. [LVII.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis mediis ſecunda.*

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus tertiâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, quorum majus ſit A E: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe; quæ ex binis mediis ſecunda appellatur. Vide fig. Prop. 56.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A D ex binis nominibus tertia eſt; erunt A E, E D rationales potentiâ ſolum commenſurabiles[k], et A E plus poterit quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, neutraque ipſarum A E, E D ipſi A B longitudine erit commenſurabilis. Similiter[l] oſtendemus M O eam eſſe, quæ ſpatium A C poteſt, et eſſe ex binis mediis M N, N O: itaque oſtendendum eſt et ſecundam eſſe. Quoniam enim D E incommenſurabilis eſt longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K; atque eſt D E commenſurabilis E F: erit E F ipſi E K longitudine incommenſurabilis. Et ſunt rationales: ergo F E, E K rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id E L, hoc eſt, M R, medium eſt; et continetur ſub M N, N O. Medium igitur eſt quod ſub M N, N O continetur. Quare M O ex binis mediis eſt ſecunda[m]. *Q. E. D.*

[k] Def. Secund. 3. hujus.
[l] Atque in præc.
[m] 39. hujus.

## PROP. LVIII. THEOR. [LVIII.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur major.*

Spatium enim A C contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus quartâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, quorum A E ſit majus: dico rectam lineam, quæ ſpatium A C poteſt, irrationalem eſſe; quæ major appellatur.

Quoniam enim A D ex binis nominibus eſt quarta; erunt A E, E D rationales potentiâ ſolum commenſurabiles[n], et A E plus poterit quam E D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, et A E ipſi A B commenſurabilis erit longitudine. Dividatur D E bifariam in F, et quadrato ipſius E F æquale parallelogrammum ad A E applicetur, deficiens figurâ quadratâ, rectangulum

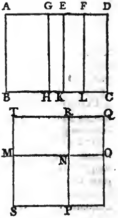
[n] Def. Secund. 4. hujus.

gulum nempe ſub A G, G E: erit igitur A G ipſi G E longitudine incommenſurabilis [o].

[o] 19. hujus.

Ducantur ipſi A B parallelæ G H, E K, F L, et eadem fiant, quæ ſupra. Conſtat igitur M O poſſe ſpatium A C. Oſtendendum autem eſt M O irrationalem eſſe, quæ vocatur major. Quoniam enim A G ipſi G E incommenſurabilis eſt longitudine, erit et A H ipſi G K incommenſurabile [p], hoc eſt, S N ipſi N Q [q]. Ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A E ipſi A B longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum A K rationale eſt; atqui eſt æquale quadratis ipſarum M N, N O: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O eſt rationale.

[p] 1. ſexti. & 10. hujus.
[q] Per conſtruct.




Quod cum D E ſit incommenſurabilis longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, ſit autem D E commenſurabilis ipſi E F: erit E F ipſi E K incommenſurabilis longitudine. Quare K E, E F rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles [r]; et ob id medium eſt L E, hoc eſt, M R, quod continetur ſub M N, N O. Medium igitur eſt quod ſub M N, N O continetur; eſtque compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O rationale; et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilis. Si autem duæ rectæ lineæ potentiâ incommenſurabiles componantur, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; tota irrationalis erit: vocatur autem major [s]. Ergo M O irrationalis eſt, quæ major appellatur, et poteſt ſpatium A C. *Q. E. D.*

[r] 22. hujus.
[s] 40. hujus.

## [LIX.] PROP. LIX. THEOR.

*Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur rationale et medium potens.*

Vide fig. Prop. 58.

Spatium enim A C contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus quintâ A D, diviſâ in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen ſit A E: dico rectam lineam, quæ

quæ poteſt ſpatium A C, irrationalem eſſe; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra: manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C. Oſtendere autem oportet M O eſſe, quæ rationale ac medium poteſt. Quoniam enim A G ipſi E G incommenſurabilis eſt longitudine; et parallelogrammum A H eſt incommenſurabile parallelogrammo H E[t], hoc eſt, quadratum ex M N quadrato ex N O: ergo M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt. Et quoniam A D eſt ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio E D; erit E D ipſi A B commenſurabilis longitudine[u]. Sed A E ipſi E D longitudine eſt incommenſurabilis: ergo et A B incommenſurabilis eſt longitudine ipſi A E[x]: ac propterea B A, A E rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K[y], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Et quoniam D E commenſurabilis eſt longitudine ipſi A B, hoc eſt, ipſi E K, eſtque D E commenſurabilis ipſi E F: erit et E F ipſi E K commenſurabilis. Rationalis autem eſt E K: rationale igitur eſt et E L[z], hoc eſt, M R, hoc eſt, parallelogrammum quod ſub M N, N O continetur. Quare M N, N O potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo M O eſt rationale ac medium potens, et poteſt ſpatium A C[a]. *Q. E. D.*

[t] 1. ſexti, & 10. hujus.
[u] Def. Secund. 5. hujus.
[x] 13. hujus.
[y] 22. hujus.
[z] 20. hujus.
[a] 41. hujus.

## PROP. LX. THEOR. [LX.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali, et ex binis nominibus ſextâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.*

Spatium enim A B C D contineatur ſub rationali A B, et ex binis nominibus ſextâ A D, quæ dividatur in nomina ad punctum E, ita ut A E ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe bina media potentem.

Vide fig. Prop. 58.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Manifeſtum igitur eſt M O poſſe ſpatium A C, et M N ipſi N O potentiâ incommenſurabilem eſſe. Et quoniam E A ipſi A B incommenſurabilis eſt longitudine, erunt E A, A B rationales potentiâ ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt A K[b], hoc eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum M N, N O. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt E D ipſi A B longitudine, erit et F E ipſi E K longitudine incommenſurabilis;

[b] 22. hujus.

commensurabilis: ergo et F E, E K rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea medium est E L, hoc est, M R, hoc est, quod sub M N, N O continetur. Et quoniam E A est incommensurabilis ipsi E F longitudine; et parallelogrammum A K parallelogrammo E L incommensurabile erit. Sed A K quidem est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O; E L vero est quod sub M N, N O continetur. Incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum M N, N O ei, quod sub M N, N O continetur. Atque est utrumque ipsorum medium; et M N, N O potentiâ sunt incommensurabiles: ergo M O est bina media potens, et potest spatium A C[c]. *Q. E. D.*

c 42. hujus.

LEMMA VIII.

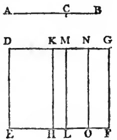
Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo, quod bis sub dictis partibus continetur.

Demonstratur ex 5ª et 9ª secundi ad modum Corollarii Lemmatis sexti.

[LXI.] PROP. LXI. THEOR.

*Quadratum ejus, quæ est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.*

Sit ex binis nominibus A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato rectæ lineæ A B æquale ad ipsam D E applicetur rectangulum parallelogrammum D E F G, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus primam esse.




Applicetur enim ad rationalem D E quadrato quidem ipsius A C æquale parallelogrammum D H; quadrato autem ipsius B C æquale K L[f]: reliquum igitur quod bis sub A C, C B continetur est æquale parallelogrammo M F[g]. Secetur M G bifariam in N, et alterutri ipsarum M L, G F parallela ducatur N O: utrumque igitur parallelogrammorum M O, N F est æquale ei, quod semel sub A C, C B continetur. Et quoniam ex binis nominibus

f 45. primi.

g 4. secundi.

minibus

minibus eſt A B, diviſa in nomina ad punctum C; erunt A C, C B rationales potentiâ ſolum commenſurabiles [h]. [h] 37. hujus.
Ergo quadrata ex A C, C B rationalia ſunt et commenſurabilia inter ſe; et ob id compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B commenſurabile eſt ipſarum A C, C B quadratis [i]: rationale igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B. Atqui eſt æquale parallelogrammo D L. Ergo et D L eſt rationale, et ad rationalem D E applicatum rationalem efficit D M, et ipſi D E commenſurabilem longitudine [k]. Rurſus, quoniam A C, C B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; medium eſt quod bis ſub A C, C B continetur, hoc eſt, rectangulum M F. Et ad rationalem M L applicatum rationalem efficit M G, ſed ipſi M L, hoc eſt, ipſi E D, longitudine incommenſurabilem [l]. Eſt autem et M D rationalis, et ipſi D E commenſurabilis longitudine: ergo D M ipſi M G longitudine eſt incommenſurabilis [m]. Suntque rationales: ergo D M, M G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D G eſt ex binis nominibus [h]. Oſtendendum eſt et primam eſſe. Quoniam enim inter quadrata ex A C, C B medium proportionale eſt, quod ſub A C, C B continetur; erit etiam inter parallelogramma D H, K L medium proportionale M O [n]. Eſt igitur ut D H ad M O, ita M O ad K L; hoc eſt, ut recta linea D K ad M N, ita M N ad M K [o]: ergo rectangulum ſub D K, K M quadrato ex M N eſt æquale [p]. Et quoniam quadratum ex A C commenſurabile eſt quadrato ex C B, erit et parallelogrammum D H parallelogrammo K L commenſurabile [p]: ergo et D K ipſi K M longitudine eſt commenſurabilis. Quod cum quadrata ex A C, C B majora ſint eo, quod bis ſub A C, C B continetur [q]; erit et parallelogrammum D L majus parallelogrammo M F: ideoque recta linea D M ipſâ M G eſt major. Atqui eſt rectangulum ſub D K, K M æquale quadrato ex M N, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex M G; et D K ipſi K M longitudine eſt commenſurabilis. Si autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes commenſurabiles ipſam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine [r]. Quare D M plus poteſt quam M G quadrato rectæ ipſi D M longitudine commenſurabilis. Suntque rationales D M, M G;

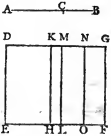
[i] 16. hujus.
[k] 21. hujus.
[l] 23. hujus.
[m] 13. hujus.
[n] Lemma 7.
[o] 1. ſexti.
[p] 17. ſexti.
[p] 10. hujus.
[q] Lem. 8. hujus.
[r] 18. hujus.

M G; atque D M, quæ eſt majus nomen, expoſitæ ratio-
[s] Def. Secund. 1. hujus. nali D E longitudine eſt commenſurabilis: ergo D G eſt ex binis nominibus prima [s]. *Q. E. D.*

[LXII.] PROP. LXII. THEOR.

*Quadratum ejus, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.*

Sit ex binis mediis prima A B, diviſa in nomina ad punctum C, ita ut A C ſit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et ad ipſam D E applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius A B, quod ſit D F, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus ſecundam eſſe.



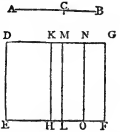

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B ex binis mediis eſt prima, diviſa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale conti-
[t] 38. hujus. nent [t]. Quare et quæ fiunt ex A C, C B quadrata media ſunt; ideoque D L eſt medium, et ad rationalem D E applicatum, rationalem efficit M D, ſed ipſi D E longi-
[u] 23. hujus. tudine incommenſurabilem [u]. Rurſus, quoniam rationale eſt, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et M F rationale, et ad rationalem M L applicatum efficit M G
[x] 21. hujus. rationalem, et ipſi M L [x], hoc eſt, ipſi D E, commenſurabilem longitudine. Incommenſurabilis igitur eſt D M
[y] 13. hujus. ipſi M G [y]. Sed rationales ſunt. Quare D M, M G rationales ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea D G eſt ex binis nominibus. Oſtendendum eſt et ſecundam eſſe. Quoniam enim quadrata ex A C,
[z] Lem. 8. hujus. C B majora ſunt eo, quod bis ſub A C, C B continetur [z]; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F majus: ergo et recta linea D M major eſt ipſâ M G. Quod cum quadratum ex A C quadrato ex C B ſit commenſurabile; et D H parallelogrammum parallelogrammo K L commenſurabile erit: quare et D K commenſurabilis ipſi K M. Sed rectangulum, quod ſub D K, K M continetur, quadrato ipſius M N æquale eſt. (Id enim ut in præcedente oſtendatur.) Ergo D M plus poteſt

poteſt quam M G quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [a]. Eſtque M G commenſurabilis longitudine ipſi D E. Quare D G eſt ex binis nominibus ſecunda [b]. *Q. E. D.* [a] 18. hujus. [b] Def. Secund. 2. hujus.

## PROP. LXIII. THEOR. [LXIII.]

*Quadratum ejus, quæ eſt ex binis mediis ſecunda, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.*

Sit ex binis mediis ſecunda A B, diviſa in nomina ad C, ita ut A C ſit majus nomen; rationalis autem ſit D E, et ad ipſam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G ex binis nominibus tertiam eſſe.




Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B eſt ex binis mediis ſecunda, diviſa ad punctum C; erunt A C, C B mediæ, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent [c]: ergo et compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis medium eſt. Atqui eſt æquale ipſi D L: medium igitur eſt D L. Sed ad rationalem D E applicatur: ergo rationalis eſt M D, ſed ipſi D E longitudine incommenſurabilis [d]. Rectangulum autem quod ſub A C, C B medium eſt [e]. Illius autem duplum M F. Quare et M F medium, et ad rationalem M L applicatum, efficit M G rationalem, ſed ipſi M L, ſeu D E, longitudine incommenſurabilem [d]. Utraque igitur ipſarum D M, M G rationalis eſt, et ipſi D E longitudine incommenſurabilis. Et quoniam incommenſurabilis eſt A C ipſi C B longitudine, ut autem A C ad C B ita quadratum ex A C ad rectangulum ſub A C, C B [f]; erit et quadratum ex A C rectangulo ſub A C, C B incommenſurabile. Ergo compoſitum ex quadratis ipſarum A C, C B incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur; hoc eſt, D L incommenſurabile ipſi M F; et ob id recta linea D M ipſi M G longitudine eſt incommenſurabilis. Suntque rationales: ergo D G eſt ex binis nominibus. Oſtendendum eſt et tertiam eſſe. Similiter enim ac in præcedente concludemus D M ipſa

[c] 39. hujus. [d] 23. hujus. [e] ex hyp. [f] 1. ſexti.

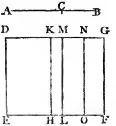
ipsâ M G majorem esse, et D K ipsi K M commensurabilem. Atqui est rectangulum sub D K, K M quadrato ipsius M N æquale: ergo D M plus potest quam M G
h 18. hujus. quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[h]. Et neutra ipsarum D M, M G est longitudine commen-
i Def. Secund. 3. hujus. surabilis ipsi D E. Quare D G est ex binis nominibus tertia[i]. *Q. E. D.*

[LXIV.] PROP. LXIV. THEOR.

*Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.*

Sit major A B, divisa in nomina in puncto C, ita ut A C sit majus nomen; rationalis autem quædam sit D E, et quadrato ex A B æquale ad ipsam D E applicetur parallelogrammum D F, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quartam.

Construantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam A B est major, divisa in nomina in C; erunt A C, C B potentiâ in-
k 40. hujus. commensurabiles[k], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum A C, C B, erit et parallelogrammum D L rationale. Ergo et rationalis est recta linea D M, ipsique D E longitudine commen-




l 21. hujus. surabilis[l]. Rursus, quoniam medium est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, M F, et ad rationalem M L est applicatum; erit et M G rationalis, sed ipsi D E in-
m 23. hujus. commensurabilis longitudine[m]. Ergo et D M ipsi M G longitudine incommensurabilis est; ac propterea D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles:
n 37. hujus. quare ex duobus nominibus est D G[n]. Ostendendum est et quartam esse. Similiter enim atque in superioribus concludemus D M majorem esse quam M G, et rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N æquale. Quoniam igitur quadratum ex A C incommensurabile est quadrato ex C B; erit et D H parallelogrammum incommensurabile
o 10. hujus. parallelogrammo K L[o]; et ob id recta linea K D ipsi K M longitudine incommensurabilis. Si autem sint duæ rectæ

lineæ

lineæ inæquales, et quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividat; major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [p]. Ergo D M plus potest quam M G quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Suntque D M, M G rationales potentiâ solum commensurabiles, atque est D M commensurabilis expositæ rationali D E. Quare D G est ex binis nominibus quarta [q]. *Q. E. D.*

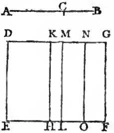
[p] 19. hujus.
[q] Def. Secund. 4. hujus.

## PROP. LXV. THEOR. [LXV.]

*Quadratum ejus, quæ rationale ac medium potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.*

Sit rationale ac medium potens A B, divisa in nomina ad punctum C, ita ut A C sit majus nomen; exponaturque rationalis D E, et quadrato ipsius A B æquale parallelogrammum D F ad ipsam D E applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G esse ex binis nominibus quintam.

Construantur enim, quæ supra. Et quoniam rationale ac medium potens est A B, divisa ad C punctum; erunt A C, C B potentiâ incommensurabiles [r], quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum A C, C B quadratis; erit et parallelogrammum D L medium: ideoque recta linea D M rationalis est, sed ipsi D E longitudine incommensurabilis [s]. Rursus, quoniam rationale est quod bis sub A C, C B continetur, hoc est, parallelogrammum M F; erit M G rationalis et ipsi D E longitudine commensurabilis [t]. Incommensurabilis igitur est D M ipsi M G longitudine [u]. Quare D M, M G rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ac propterea D G est ex binis nominibus [x]. Dico et quintam esse. Similiter enim ac in præcedentibus demonstrabitur rectangulum sub D K, K M quadrato ex M N esse æquale; et D K ipsi K M longitudine esse incommensurabilem. Quare D M plus




[r] 41. hujus.
[s] 23. hujus.
[t] 21. hujus.
[u] 13. hujus.
[x] 37. hujus.

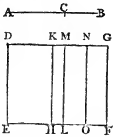
plus poteſt quam M G quadrato rectæ lineæ ſibi incom-
[y] 19. hujus. menſurabilis longitudine [y]. Suntque D M, M G rationales potentiâ ſolum commenſurabiles, et minor M G
[z] Def. Secund. 5. hujus. commenſurabilis eſt ipſi D E longitudine. Ergo D G eſt ex binis nominibus quinta [z]. *Q. E. D.*

## [LXVI.] PROP. LXVI. THEOR.

*Quadratum ejus, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.*

Sit bina media potens A B, diviſa in nomina ad punctum C; rationalis autem ſit D E, et ad ipſam D E quadrato ex A B æquale parallelogrammum D F applicetur, latitudinem faciens D G: dico D G eſſe ex binis nominibus ſextam.

Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam A B eſt bina media potens, diviſa ad C; erunt A C, C B potentiâ in-
[a] 42. hujus. commenſurabiles [a], facientes et compoſitum ex ipſarum quadratis medium, et quod ſub ipſis continetur medium, et adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. Ergo ex jam demonſtratis medium eſt utrumque parallelogrammorum D L, M F, et ad rationalem D E applicata ſunt: rationalis igitur eſt et



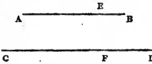

utraque D M, M G, et ipſi D E longitudine incommen-
[b] 23. hujus. ſurabilis [b]. Et quoniam compoſitum ex ipſarum A C, C B quadratis incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A C, C B continetur; erit et D L parallelogrammum parallelogrammo M F incommenſurabile; et idcirco recta
[c] 10. hujus. D M longitudine incommenſurabilis rectæ M G [c]. Quare D M, M G rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; igitur D G eſt ex binis nominibus. Dico et ſextam eſſe. Similiter enim atque in præcedentibus rurſus oſtendemus rectangulum ſub D K, K M quadrato ex M N æquale, et D K ipſi K M longitudine incommenſurabilem eſſe. Ergo D M plus poteſt quam M G quadrato
[d] 19. hujus. rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine [d]. Et neutra ipſarum D M, M G longitudine commenſurabilis
[e] Def. Secund. 6. hujus. eſt expoſitæ rationali D E. Quare D G eſt ex binis nominibus ſexta [e]. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. LXVII. THEOR. [LXVII.]

*Ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.*

Sit ex binis nominibus A B, et ipsi A B longitudine commensurabilis sit C D: dico C D ex binis nominibus esse, et ordine eandem ipsi A B.



Quoniam enim ex binis nominibus est A B, dividatur in nomina ad punctum E, et sit A E majus nomen: ergo A E, E B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [f]. Fiat ut A B ad C D, ita A E ad C F [g]; et reliqua igitur E B ad reliquam F D est ut A B ad C D [h]. Commensurabilis autem est A B ipsi C D longitudine: ergo et A E ipsi C F, et E B ipsi F D, longitudine est commensurabilis [i]. Suntque rationales A E, E B: rationales igitur sunt et C F, F D. Et quoniam est ut A E ad C F, ita E B ad F D; erit permutando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sunt autem A E, E B potentiâ solum commensurabiles: ergo et C F, F D potentiâ solum commensurabiles erunt [i]. Et sunt rationales: ex binis igitur nominibus est C D [f]. Dico et ipsi A B ordine eandem esse.

[f] 37. hujus.
[g] 12. sexti.
[h] 19. quinti.
[i] 10. hujus.

Vel enim A E plus potest quam E B quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si quidem igitur A E plus possit quam E B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine [k]. Quod si A E expositæ rationali longitudine sit commensurabilis, et C F eidem longitudine commensurabilis erit [l]: et ob id utraque ipsarum A B, C D, ex binis nominibus est prima, hoc est, ordine eadem. Si vero E B longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et F D eidem erit longitudine commensurabilis: eamque ob causam C D ipsi A B ordine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus secunda. Quod si neutra ipsarum A E, E B sit expositæ rationali longitudine commensurabilis, et neutra ipsarum C F, F D eidem longitudine commensurabilis erit; et utraque A B, C D est tertia. At si A E plus possit quam E B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine,

[k] 15. hujus.
[l] 12. hujus.

longitudine; et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ
k 15. hujus. lineæ sibi longitudine incommensurabilis [k]. Et si A B longitudine sit commensurabilis expositæ rationali, et C F eidem longitudine commensurabilis erit; et est A B, C D utraque quarta. Quod si E B sit, et ipsa F D erit; et est utraque A B, C D quinta. Si vero neutra ipsarum A E, E B sit, et neutra C F, F D expositæ rationali erit longitudine commensurabilis; et est utraque A B, C D sexta.

Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem. *Q. E. D.*

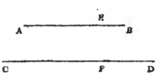
[LXVIII.]

## PROP. LXVIII. THEOR.

*Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est, atque ordine eadem.*

Sit ex binis mediis A B, et ipsi A B commensurabilis longitudine sit C D: dico C D ex binis mediis esse, et ipsi A B ordine eandem.

Quoniam enim A B ex binis mediis est, dividatur in nomina ad punctum E. Erunt igitur A E, E B mediæ, potentiâ solum commensu-
l 38. & 39. hujus. rabiles [l]. Itaque fiat ut A B ad C D, ita A E ad C F: ergo et reliqua E B ad reliquam F D est ut A B ad C D. Commensurabilis autem est A B ipsi C D



m ex hyp. longitudine [m]. Quare et A E ipsi C F longitudine commensurabilis erit, et E B ipsi F D. Suntque mediæ A E,
n 24. hujus. E B: mediæ igitur et C F, F D [n]. Et quoniam est ut A E ad E B, ita C F ad F D, et sunt A E, E B commensurabiles potentiâ solum; erunt et C F, F D potentiâ solum
o 10. hujus. commensurabiles [o]. Ostensæ autem sunt et mediæ: ergo C D est ex binis mediis [l]. Dico et ipsi A B ordine eandem esse.

Quoniam enim est ut A E ad E B, ita C F ad F D; erit et quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B,
p 1. quinti. & 1. sexti. ut quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D [p], Quare permutando ut quadratum ex A E ad quadratum ex C F, ita rectangulum sub A E, E B ad rectangulum sub C F, F D. Commensurabile autem est quadratum ex

ex A E quadrato ex C F: ergo et rectangulum sub A E, E B rectangulo sub C F, F D est commensurabile. Sive igitur rationale est rectangulum sub A E, E B, et rectangulum sub C F, F D rationale erit[n]; atque ob id est utraque A B, C D ex binis mediis prima[o]. Sive vero medium est rectangulum sub A E, E B, et ipsum sub C F, F D erit medium[p]. Atque est utraque A B, C D ex binis mediis secunda[q]; et propterea C D ipsi A B ordine eadem est. *Q. E. D.*

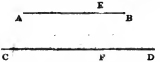
[n] Def. 9. hujus.
[o] 38. hujus.
[p] Cor. Def. 12.* hujus.
[q] 39. hujus.

## PROP. LXIX. THEOR. [LXIX.]

*Majori commensurabilis et ipsa major est.*

Sit major A B; et ipsi A B commensurabilis longitudine sit C D: dico C D majorem esse.

Dividatur A B in nomina in E: ergo A E, E B potentiâ sunt incommensurabiles[r], quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Et fiant eadem, quæ supra. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita A E ad C F, et E B ad F D; erit ut A E ad C F, ita E B ad F D[s]. Et permutando ut A E ad E B, ita C F ad F D. Sed potentiâ incommensurabiles sunt A E, E B. Quare et C F, F D potentiâ sunt incommensurabiles[t]. Commensurabilis autem est A B ipsi C D longitudine: ergo et utraque ipsarum A E, E B utrique C F, F D longitudine est commensurabilis[t]. Et quoniam est ut A E ad C F, ita E B ad F D; permutandoque ut A E ad E B, ita C F ad F D; erit componendo ut A B ad B E, ita C D ad D F: ut igitur quadratum ex A B ad quadratum ex B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F[u]. Similiter demonstrabimus et ut quadratum ex A B ad quadratum ex A E, ita esse quadratum ex C D ad quadratum ex C F. Ergo ut quadratum ex A B ad quadrata ex A E, E B, ita quadratum ex C D ad quadrata ex C F, F D[x]. Permutando igitur ut quadratum ex A B ad quadratum ex C D, ita quadrata ex A E, E B ad quadrata ex C F, F D. Commensurabile autem est quadratum ex A B quadrato ex C D: ergo et quadrata ex A E, E B quadratis ex C F, F D sunt commensurabilia. Atqui est compositum ex quadratis ipsarum




[r] 40. hujus.
[s] 11. quinti.
[t] 10. hujus.
[u] 22. sexti.
[x] 24. quinti.

u 40. hujus. rum A E, E B rationale u: ergo et rationale erit compo-
x Def. 9. hujus. situm ex quadratis ipsarum C F, F D x. Rectangulum autem quod bis continetur sub A E, E B commensurabile est ei, quod bis sub C F, F D continetur. Atqui est medium quod bis continetur sub A E, E B u. Medium igi-
y Cor. Def. tur est et quod bis sub C F, F D continetur y. Ergo C F,
12.* hujus. F D potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. Tota igitur irrationalis est, quæ vocatur major *.

Ergo majori commensurabilis et ipsa major est. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Rectangula quæ sub A E, E B; C F, F D continentur inter se commensurabilia esse sic ostendimus.

Rectæ A B, C D ponuntur longitudine commensurabiles. Erit igitur A B ad C D, ut numerus
z 5. hujus. ad numerum z; puta ut M ad N. Ut autem A B ad C D, sic est A E ad C F, et E B ad F D. Erit igitur tum A E ad C F, tum E B ad F D,

M . . .
N . . . .

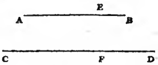
a 11. quinti. ut numerus M ad numerum N a. Quapropter rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub C F, F D rationem habebit, quam quadratus numeri M, ad qua-
b 23. sexti, & 5. octavi. dratum numeri N b: numeri igitur ad numerum ratio-nem. Rectangulum igitur quod sub A E, E B, illi quod
c 6. hujus. sub C F, F D commensurabile est c. *Q. E. D.*

*Cor.* * Rectangula, quorum latera lateribus, singula singulis, longitudine sint commensurabilia, et ipsa inter se commensurabilia erunt.

[LXX.] PROP. LXX. THEOR.

*Rationale ac medium potenti commensurabilis et ipsa rationale ac medium potens est.*

Sit rationale ac medium potens A B; et ipsi A B commensurabilis sit C D: ostendendum est et C D rationale ac medium potentem esse.




Dividatur A B in rectas suas ad punctum E: ergo A E, E B potentiâ incom-

mensurabiles

mensurabiles sunt[d], facientes compositum ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale: et eadem, quæ prius, construantur. Similiter ac in præcedente demonstrabimus C F, F D potentiâ esse incommensurabiles; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum C F, F D; quod autem continetur sub A E, E B commensurabile esse ei, quod sub C F, F D continetur. Ergo et compositum ex quadratis ipsarum C F, F D est medium[e], quod autem continetur sub C F, F D rationale[f]; et igitur C D est rationale ac medium potens[g]. *Q. E. D.*

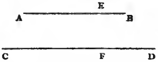
[d] 41. hujus. [e] Cor. Def. 12.ª hujus. [f] Def. 9. hujus. [g] 41. hujus.

## PROP. LXXI. THEOR. [LXXI.]

*Bina media potenti commensurabilis et ipsa bina media potens est.*

Sit bina media potens A B, et ipsi A B commensurabilis sit C D: ostendendum est C D bina media potentem esse.

Quoniam enim bina media potens est A B, dividatur in rectas suas ad punctum E. Quare A E, E B potentiâ sunt incommensurabiles[h], quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex quadratis ipsarum A E, E B incommensurabile rectangulo sub ipsis A E, E B: et construantur eadem, quæ supra. Similiter ac in præcedentibus demonstrabimus C F, F D potentiâ incommensurabiles esse; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile composito ex quadratis ipsarum C F, F D; quod autem sub A E, E B continetur commensurabile esse ei, quod continetur sub C F, F D. Quare et compositum ex quadratis ipsarum C F, F D medium est; itemque medium quod sub C F, F D continetur[i]. Porro compositum ex quadratis ipsarum C F, F D rectangulo sub ipsis C F, F D est incommensurabile. Nam cum A E sit ad E B, ut C F ad F D; erit quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B, ut quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D. Simili ratione quadratum ex E B ad rectangulum sub A E, E B, ut quadratum




[h] 42. hujus. [i] Cor. Def. 12.ª hujus.

dratum ex F D ad rectangulum sub C F, F D. Quare et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B ad rectangulum sub A E, E B, ut compositum ex quadratis ipsarum C F, F D ad rectangulum sub C F, F D[d]. Compositum autem ex quadratis ipsarum A E, E B rectangulo sub A E, E B est incommensurabile. Quare et compositum ex quadratis ipsarum C F, F D est incommensurabile rectangulo sub C F, F D[e]. Ergo C D est bina media potens[f]. *Q. E. D.*

[d] 24. quinti. [e] 10. hujus. [f] 42. hujus.

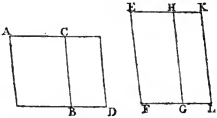
[LXXII.]

## PROP. LXXII. THEOR.

*Quæ potest spatium ex rationali et medio compositum, ex irrationalibus erit in serie primâ; nimirum vel prima in serie, vel secunda, vel quarta, vel quinta: hoc est, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens.*

Sit rationale quidem spatium A B, medium autem C D: dico eam, quæ potest spatium A D, vel esse ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim rationale A B vel majus est medio C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F, et ad ipsam applicetur parallelogrammum E G ipsi




A B æquale, quod latitudinem faciat E H; ipsi vero C D æquale ad E F, hoc est, ad H G, applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam rationale est A B, et ipsi est æquale E G; erit et E G rationale; et ad rationalem E F applicatum latitudinem efficiet E H rationalem, et ipsi E F longitudine commensurabilem[g]. Rursus quoniam medium est C D, et ipsi est æquale H L; erit et H L medium; et ad rationalem E F, hoc est, H G, applicatum latitudinem efficiet H K rationalem, sed incommensurabilem

[g] 21. hujus.

bilem ipſi E F longitudine[h]. Quod cum medium ſit[a] C D, rationale autem A B; erit A B ipſi C D incommenſurabile: ergo et E G incommenſurabile eſt ipſi H L. Ut autem E G ad H L, ita eſt recta linea E H ad H K[l]:[l] ergo E H ipſi H K longitudine eſt incommenſurabilis. Et ſunt ambæ rationales. Quare E H, H K rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id ex binis nominibus eſt E K, diviſa ad punctum H. Et quoniam majus eſt A B quam C D, æquale autem A B ipſi E G, et C D ipſi H L; erit et E G quam H L majus: ergo et E H major eſt quam H K. Vel igitur E H plus poteſt quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit major H E expoſitæ rationali E F commenſurabilis: erit E K ex binis nominibus prima[k]. Atqui eſt E F rationalis. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus primâ; recta linea ſpatium potens ex binis nominibus eſt[l]: ergo quæ poteſt ſpatium E L eſt ex binis nominibus. Quare et ea, quæ poteſt ſpatium A D, eſt ex binis nominibus.

[a] 23. hujus.
[l] 1. ſexti.
[k] Def. Secund. 1. hujus.
[l] 55. hujus.

Sed E H plus poſſit quam H K quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum ſit major E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis longitudine; erit E K ex binis nominibus quarta[m]. Sed rationalis eſt E F. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus quartâ; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ major appellatur[n]. Potens igitur ſpatium E L major eſt: ergo et potens ſpatium A D major.

[m] Def. Secund. 4. hujus.
[n] 58. hujus.

Sed ſit ſpatium A B minus quam C D: erit igitur et E G quam H L minus; et ob id recta linea E H minor quam recta H K. Vel igitur K H plus poteſt quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et cum ſit minor E H commenſurabilis expoſitæ rationali E F longitudine: erit E K ex binis nominibus ſecunda[o]. Rationalis autem E F. Quod ſi ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus ſecundâ, recta linea ſpatium potens eſt ex binis mediis prima[p]. Potens igitur

[o] Def. Secund. 2. hujus.
[p] 56. hujus.

ſpatium E L eſt ex binis mediis prima: ergo et potens ſpatium A D.

Sed K H plus poſſit quam E H quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et cum minor E H expoſitæ rationali E F commenſurabilis ſit longitudine; erit E K eſt ex binis nominibus quinta[q]. Atqui eſt rationalis E P. Si autem ſpatium contineatur ſub rationali et ex binis nominibus quintâ; quæ ſpatium poteſt recta linea, rationale ac medium potens eſt[r]. Quæ igitur poteſt ſpatium E L, rationale et medium potens eſt; ideoque rationale et medium potens eſt, quæ poteſt ſpatium A D.

[q] Def. Secund. 5. hujus.

[r] 59. hujus.

Quæ poteſt igitur ſpatium ex rationali et medio compoſitum, ex irrationalibus erit in ſerie primâ; nimirum vel prima in ſerie, vel ſecunda, vel quarta, vel quinta; hoc eſt, vel ex binis nominibus; vel ex binis mediis prima; vel major; vel rationale ac medium potens. *Q. E. D.*

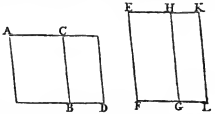
[LXXIII.]

## PROP. LXXIII. THEOR.

*Quæ poteſt ſpatium ex duobus mediis inter ſe incommenſurabilibus compoſitum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in ſerie primâ, vel tertia, vel ſexta: hoc eſt, vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.*

Componantur enim duo media incommenſurabilia inter ſe A B, C D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A D poteſt, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.

Spatium enim A B vel majus eſt quam C D, vel minus. Sit primum majus; exponaturque rationalis E F; et ad E F ſpatio quidem A B æquale applicetur E G,




latitudinem faciens E H; ipſi vero C D æquale applicetur H L, latitudinem faciens H K. Et quoniam medium eſt utrumque ipſorum A B, C D, erit et utrumque E G,

H L

H L medium. Sed ad rationalem E F applicata sunt. Latitudines igitur E H, H K utramque efficiunt rationalem, et ipsi E F longitudine incommensurabilem [r]. [r 23. hujus.]

Quod cum A B incommensurabile sit ipsi C D; sitque A B quidem æquale ipsi E G; C D vero ipsi H L: erit et E G ipsi H L incommensurabile. Sed ut E G ad H L, ita est E H ad H K: incommensurabilis igitur est E H ipsi H K longitudine: ideoque E H, H K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles. Quare ex binis nominibus est E K. Itaque vel E H plus potest quam H K quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; et neutra ipsarum E H, H K longitudine commensurabilis est expositæ rationali E F: ergo E K est ex binis nominibus tertia. Sed rationalis est E F. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ, recta linea spatium potens est ex binis mediis secunda [s]: ergo quæ potest spatium E L, hoc est, A D, est ex binis mediis secunda. [s 57. hujus.]

Sed E H plus possit quam H K quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et utraque ipsarum E H, H K longitudine incommensurabilis est expositæ rationali E F. Quare E K est ex binis nominibus sexta [t]. At si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; quæ spatium potest recta linea, est bina media potens [u]: ergo quæ potest spatium A D, bina media potest. Similiter demonstrabimus, si et A B sit minus quam C D, rectam lineam, quæ spatium potest A D, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem. [t Def. Secund. 6. hujus.] [u 60. hujus.]

Quæ potest igitur spatium ex duobus mediis inter se incommensurabilibus compositum, irrationalis erit; reliquarum utique alterutra in serie primâ, vel tertia, vel sexta: hoc est, vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens. *Q. E. D.*

### SCHOLION.

**Quæ ex binis nominibus, et quæ post ipsam, sunt irrationales, neque mediæ, neque inter se eædem sunt; quadratum enim quod fit a media, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, et ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem [x]: quod autem** [x 23. hujus.]

fit

fit ab eâ, quæ eſt ex binis nominibus, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus pri-
[y] 61. hujus. mam[y]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis no-
[z] 62. hujus. minibus ſecundam[z]: quod ab eâ, quæ eſt ex binis mediis ſecunda, ad rationalem applicatum, latitudinem, effi-
[a] 63. hujus. cit ex binis nominibus tertiam[a]: quod a majori, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nomi-
[b] 64. hujus. nibus quartam[b]: quod ab eâ, quæ rationale ac medium poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ex
[c] 65. hujus. binis nominibus quintam[c]: quod ab eâ, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit
[d] 66. hujus. ex binis nominibus ſextam[d]. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter ſeſe, a primâ quidem quod rationalis ſit, inter ſeſe vero quod ordine non ſint eædem, conſtat et ipſas irrationales eſſe, aliam ab aliâ differentes.

## *Principium Senariorum per Detractionem* †.

[LXXIV.] PROP. LXXIV. THEOR.

*Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem Apotome* ‡.

A rationali enim A B rationalis auferatur B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt A B ipſi B C




longitudine, atque eſt ut A B ad B C, ita quadratum ex
[f] 1. ſexti. A B ad id, quod continetur ſub A B, B C[f]; erit quadratum

† *Per detractionem ſunt binomia, quorum nomina ſigno — conjuncta ſunt.*

‡ *Quam ſane* Reſiduam *Juniores dicerent.*

ex

ex A B incommensurabile ei, quod sub A B, B C, continetur: sed quadrato ex A B commensurabile est compositum ex quadratis ex A B, B C[f]; ei vero quod continetur sub A B, B C commensurabile est quod bis sub A B, B C continetur. Compositum igitur ex ipsarum A B, B C quadratis ei, quod bis continetur sub A B, B C, est incommensurabile. Ergo reliquo, nempe quadrato ex A C, incommensurabile est compositum ex quadratis ex A B, B C; quoniam quadrata ex A B, B C simul sumpta æqualia sunt ei, quod bis sub A B, B C continetur una cum quadrato ex A C[g]. Rationale autem est compositum ex quadratis ex A B, B C[h]: (nimirum cum ipsa A B rationalis sit, et quadrata ex A B, B C inter se commensurabilia[i]:) ergo recta linea A C est irrationalis: vocetur autem apotome[k]. *Q. E. D.*

[f] 16. hujus. [g] 7. secundi. [h] 16. & Def. 9. hujus. [i] ex hyp. [k] Def. 11. hujus.

## PROP. LXXV. THEOR. [LXXV.]

*Si a mediâ media auferatur, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est: vocetur autem mediæ apotome prima.*

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ solum commensurabilis existens ipsi A B, et cum eâ rationale faciens, videlicet quod sub A B, B C continetur: dico reliquam A C irrationalem esse.

Quoniam enim A B, B C mediæ sunt, erunt et quadratorum quæ ex A B, B C utrumque medium. Incommensurabile igitur utrumque ei quod bis continetur




sub A B, B C, rationali. Compositum igitur ex quadratis A B, B C incommensurabile est ei, quod bis sub A B, B C continetur[l]: ergo et reliquo, sc. quadrato ex A C, incommensurabile est id, quod bis sub A B, B C continetur[m]: quoniam si tota magnitudo uni componentium sit incommensurabilis, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt[n]. Rationale autem est, quod bis continetur sub A B, B C. Irrationale igitur est quadratum ex A C: ideoque irrationalis est A C[o]: vocetur autem mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

[l] 16. & 14. hujus. [m] 7. secundi. [n] 17. hujus. [o] Def. 11. hujus.

PROP.

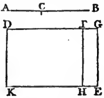
[LXXVI.]

## PROP. LXXVI. THEOR.

*Si a mediâ media auferatur, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ medium continet; et reliqua irrationalis eſt: vocetur autem mediæ apotome ſecunda.*

A mediâ enim A B auferatur media B C, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti A B, et cum eâ medium continens, videlicet quod continetur ſub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Exponatur enim rationalis D K, et quadratis quidem ex A B, B C ſimul ſumptis æquale parallelogrammum D E ad ipſam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis ſub A B, B C continetur æquale parallelogrammum D H ad eandem D K applicetur, latitudinem faciens D F: reliquum igitur F E eſt æquale quadrato ex A C [m]. Et quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ex A B, B C [n]; (nempe cum quadrata illa media ſint inter ſe commenſurabilia) erit et parallelogrammum D E medium. Et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D G: ergo D G eſt rationalis, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis [o]. Rurſus, quoniam medium eſt quod ſub A B, B C continetur; erit et quod bis continetur ſub A B, B C medium. Atqui eſt æquale parallelogrammo D H: ergo et D H eſt medium, et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D F: rationalis igitur eſt D F, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis. Et quoniam A B, B C potentiâ ſolum commenſurabiles ſunt; erit A B ipſi B C incommenſurabilis longitudine: ergo quadratum ex A B incommenſurabile eſt ei, quod ſub A B, B C continetur [p]. Sed quadrato quidem ex A B commenſurabile eſt compoſitum ex iis, quæ ex A B, B C fiunt, quadratis [q]; ei vero quod ſub A B, B C continetur commenſurabile eſt id quod bis continetur ſub A B, B C [r]. Compoſitum igitur ex quadratis A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur. D E autem eſt æquale quadratis ex A B, B C ſimul ſumptis; et parallelogrammum D H æquale eſt ei, quod bis continetur ſub A B, B C [s]: ergo D E ipſi D H eſt




[m] 7. ſecundi

[n] 16. & Cor. Def. 11. hujus.

[o] 23. hujus.

[p] 1. ſexti, & 10. hujus.

[q] 16. hujus.

[r] 6. hujus.

[s] Per conſtr.

eſt incommenſurabile. Sed ut D E ad D H, ita recta linea G D ad D F[t]: incommenſurabilis igitur eſt G D [t] 1. ſexti.
ipſi D F longitudine. Sed ſunt ambæ rationales: quare G D, D F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ergo F G apotome eſt[u]. Et D K eſt rationalis. [u] 74. hujus.
Quod autem ſub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt[x]; ideo et ipſum potens eſt [x] Cor. 39. hujus.
irrationalis. Sed recta linea A C poteſt F E parallelogrammum: ergo A C eſt irrationalis: vocetur autem mediæ apotome ſecunda. *Q. E. D.*

## PROP. LXXVII. THEOR. [LXXVII.]

*Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum totâ faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; reliqua irrationalis eſt: vocetur autem minor.*

A rectâ lineâ A B auferatur recta B C, potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, facienſque cum totâ A B compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis rationale, quod autem bis ſub A B, B C continetur medium: dico reliquam A C irrationalem eſſe.

Quoniam enim compoſitum quidem ex ipſarum A B, B C quadratis rationale eſt: quod autem bis ſub A B,




B C continetur medium; erit compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B C incommenſurabile ei, quod bis continetur ſub A B, B C. Ergo per converſionem, compoſitum ex quadratis ex A B, B C quadrato ex A C eſt incommenſurabile[y]. Sed compoſitum ex quadratis ex A B, [y] 17. hujus.
B C rationale eſt[z]: irrationale igitur eſt quadratum ex [z] ex hyp.
A C; ideoque recta linea A C eſt irrationalis: vocetur autem minor. *Q. E. D.*

PROP.

[LXXVIII.] PROP. LXXVIII. THEOR.

*Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.*

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium; quod autem sub A B, B C continetur, rationale: dico reliquam A C irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum A B, B C quadratis medium est, quod autem bis continetur sub A B, B C rationale; erit compositum ex ipsarum A B, B C quadratis incommensurabile ei, quod bis sub A B, B C continetur.



Et reliquum igitur quadratum ex A C incommensurabile
* 17. hujus. est ei, quod bis continetur sub A B, B C *. Atqui est quod bis continetur sub A B, B C rationale: ergo quadratum ex A C irrationale est; et ob id recta linea A C irrationalis: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. *Q. E. D.*

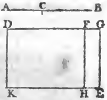
[LXXIX.] PROP. LXXIX. THEOR.

*Si a rectâ lineâ recta linea auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis; reliqua irrationalis est: vocetur autem cum medio medium totum efficiens.*

A rectâ enim lineâ A B recta linea B C auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti A B, faciensque compositum quidem ex ipsarum A B, B C quadratis medium, quod autem sub A B, B C continetur medium; et adhuc quadrata ipsarum A B, B C incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub A B, B C: dico reliquam A C irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis D K, et composito quidem ex quadratis ex A B, B C æquale parallelogrammum D E ad ipsam

ipſam D K applicetur, latitudinem faciens D G; ei vero quod bis continetur ſub A B, B C æquale auferatur D H, latitudinem faciens D F: ergo reliquum F E eſt æquale quadrato ex A C[b]; et ob id recta linea A C ipſum F E poteſt. Itaque quoniam compoſitum ex ipſarum A B, B C quadratis medium eſt, et parallelogrammo D E æquale; erit ipſum D E medium. Sed ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D G. Quare D G eſt rationalis, ſed ipſi D K longitudine incommenſurabilis[c]. Rurſus, quoniam id quod bis ſub A B, B C, continetur medium eſt, et æquale parallelogrammo D H, erit D H medium; et ad rationalem D K applicatum eſt, latitudinem faciens D F. Ergo D F eſt rationalis, ipſique D K incommenſurabilis longitudine. Et quoniam compoſitum ex quadratis ex A B, B C incommenſurabile eſt ei, quod bis ſub A B, B C continetur; et parallelogrammum D E ipſi D H eſt incommenſurabile. Ut autem D E ad D H, ita eſt recta linea D G ad ipſam D F[d]: incommenſurabilis igitur eſt D G ipſi D F longitudine[e]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo D G, D F rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles: apotome igitur eſt F G[f]. Sed F H eſt rationalis. Quod autem ſub rationali et irrationali continetur rectangulum, irrationale eſt[g]; ipſumque potens eſt irrationalis. Irrationale igitur eſt rectangulum F E, et quæ poteſt ipſum A C eſt irrationalis. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*




[b] 7. ſecundi.
[c] 23. hujus.
[d] 1. ſexti.
[e] 10. hujus.
[f] 74. hujus.
[g] Cor. 39. hujus.

## PROP. LXXX. THEOR. [LXXX.]

*Apotomæ una tantum congruit† recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti.*

Sit apotome A B, congruens autem ipſi ſit B C: ergo A C, C B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[h]. Dico ipſi A B alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti ‡.

[h] 74. hujus.

† *Congruere* (προσαρμόζειν) *apotomæ Euclidi dicitur recta, quæ, in binomio per detractionem, nomen negativum conſtituit. Contra Totam appellat; quæ nomen poſitivum. Ut ſi ponatur* $x - y = z$. *Tota eſt* x, *Apotome* z, *Congruens* y.

‡ *Senſus eſt nullam aliam dari rationalem, quæ ipſi* A B *addita Totam efficiat ipſi rationali potentiâ ſolum commenſurabilem, præter illam* B C.

Si

Si enim fieri poteſt, congruat B D: ergo A D, D B h 74. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[h]. Et quoniam quò exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id




quod bis continetur ſub A D, D B, eo et quadrata ex A C, C B excedunt id quod bis ſub A C, C B continetur; (utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex A B) et permutando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et id, quod bis continetur ſub A D, D B, excedet id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quadrata ex A D, D B i ex hyp. excedunt quadrata ex A C, C B rationali[i]: utraque enim rectarum linearum D B, C B rationalis eſt; necnon utraque ipſarum A D, A C. Quod igitur bis continetur ſub A D, D B excedit id quod bis ſub A C, C B continetur rationali; quod fieri non poteſt; ambo enim media ſunt, k 27. hujus. medium autem medium non ſuperat rationali[k]. Ergo rectæ lineæ A B altera non congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti. *Q. E. D.*

[LXXXI.] PROP. LXXXI. THEOR.

*Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ rationale continens.*

Sit enim mediæ apotome prima A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, nempe quod l 75. hujus. fit ſub A C, C B[l]. Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ rationale contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat D B: ergo A D, D B mediæ ſunt potentiâ ſolum commenſurabiles[l], quæ rationale continent, nempe quod fit ſub A D, D B. Et




quoniam quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt id, quod bis continetur ſub A D, D B, eodem et quadrata ex A C, C B excedunt quod bis ſub A C, C B continetur; m 7. ſecundi. (excedunt enim eodem quadrato ex A B[m];) et permutando,

tando, quo exceſſu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur. Sed quod bis continetur ſub A D, D B excedit id, quod bis ſub A C, C B continetur rationali; ambo enim rationalia ſunt. Ergo et quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali, quod fieri non poteſt; ambo enim ſunt media[n], medium autem medium non ſuperat rationali[o]. [n] ex hyp. [o] 27. hujus.

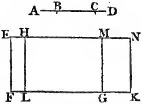
Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ ſolum toti ſit commenſurabilis, et cum totâ rationale contineat. *Q. E. D.*

## PROP. LXXXII. THEOR. [LXXXII.]

*Mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti, et cum totâ medium continens.*

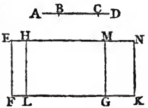
Sit mediæ apotome ſecunda A B, et ipſi A B congruat B C: ergo A C, C B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, mediumque continentes ſub A C, C B[p]. [p] 76. hujus. Dico ipſi A B alteram non congruere mediam, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ medium contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat B D. Quare A D, D B mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium ſub A D, D B continent[p].




Exponatur rationalis E F, quadratiſque ex A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E M; et ei quod bis continetur ſub A C, C B æquale auferatur parallelogrammum H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur E L eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato[r]. Ergo A B ipſum E L poteſt. [r] 7. ſecundi. Rurſus, quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipſam E F applicetur, latitudinem faciens E N; eſt autem et E L æquale quadrato ex A B: reliquum igitur H K eſt æquale ei quod bis ſub A D, D B continetur[r]. Et quoniam mediæ ſunt A C, C B, potentiâ commenſurabiles; erunt et quadrata ex A C, C B media[s], [s] Def. 12. hujus. inter ſe commenſurabilia. Quare et compoſitum ex

quadratis A C, C B (utrique ſcilicet eorum commenſurabile [q]) medium erit [r]. Compoſito autem ex quadratis A C, C B æquale eſt parallelogrammum E G. Quare E G eſt medium, et ad rationalem E F applicatum eſt, latitudinem faciens E M: ergo E M eſt rationalis, ſed ipſi E F longitudine incommenſurabilis [s]. Rurſus, quoniam medium eſt quod continetur ſub A C, C B; et quod bis ſub A C, C B continetur medium erit [r]. Atque eſt æquale parallelogrammo H G: ergo et H G eſt medium, et ad rationalem E F applicatum eſt, latitudinem faciens H M: rationalis igitur H M, ſed ipſi E F incommenſurabilis longitudine [t]. Et quoniam A C, C B potentiâ ſolum ſunt commenſurabiles [t]; erit A C incommenſurabilis ipſi C B longitudine. Ut autem A C ad C B, ita quadratum ex A C ad id quod continetur ſub A C, C B [u]: incommenſurabile igitur eſt et quadratum ex A C ei, quod ſub A C, C B continetur. Sed quadrato quidem ex A C commenſurabilia ſunt quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta; ei vero, quod continetur ſub A C, C B, commenſurabile eſt quod bis ſub A C, C B continetur [x]: ergo quadrata ex A C, C B ſimul ſumpta incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub A C, C B continetur. Atqui quadratis ex A C, C B ſimul ſumptis æquale eſt parallelogrammum E G; ei vero, quod bis ſub A C, C B continetur, æquale ipſum H G [y]: ergo E G ipſi H G eſt incommenſurabile. Sed ut E G ad H G, ita eſt recta linea E M ad ipſam H M [u]. Quare E M ipſi H M eſt incommenſurabilis longitudine. Et ſunt ambæ rationales. Ergo E M, H M rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt E H, et ipſi congruens H M [z]. Similiter demonſtrabimus et H N ipſi congruere: apotomæ igitur alia atque alia congruit recta linea, potentiâ ſolum commenſurabilis exiſtens toti; quod fieri non poteſt [a].




[q] 16. hujus.
[r] Cor. Def. 12.ª hujus.
[s] 23. hujus.
[t] ex hyp.
[u] 1. ſexti.
[x] 16. hujus.
[y] Per conſtruct.
[z] 74. hujus.
[a] 80. hujus.

Ergo mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentiâ ſolum ſit commenſurabilis toti, et cum totâ medium contineat. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. LXXXIII. THEOR. [LXXXIII.]

*Minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.*

Sit minor A B, et ipsi A B congruat B C: ergo A C, C B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium [c]. Dico ipsi A B [c] alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat. [c] 77. hujus.

Si enim fieri potest, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem



sub ipsis continetur medium [c]. Et quoniam quo excessu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem et quod bis continetur sub A D, D B excedit id, quod bis sub A C, C B continetur [d]: quadrata autem ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B rationali; ambo enim rationalia sunt [e]: igitur et quod bis continetur sub A D, D B id quod bis sub A C, C B continetur rationali excedet; quod fieri non potest [f]; etenim ambo sunt media [g], nimirum cum mediorum ex hypothesi sint dupla. [d] 7. secundi. [e] ex hyp. [f] 27. hujus. [g] Cor. Def. 12.* hujus.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod vero sub ipsis continetur medium. *Q. E. D.*

## PROP. LXXXIV. THEOR. [LXXXIV.]

*Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale.*

Sit cum rationali medium totum faciens A B, congruens autem ipsi B C: ergo A C, C B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum A C, C B quadratis medium, quod autem sub

h 78. hujus. ipsis continetur rationale [h]. Dico ipsi A B alteram non congruere, eadem facientem.

Si enim fieri potest, congruat B D: ergo A D, D B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum A D, D B quadratis medium, quod



autem sub ipsis continetur rationale [h]. Quoniam igitur quo excessu quadrata ex A D, D B excedunt quadrata ex A C, C B, eodem quod bis continetur sub A D,
i 7. secundi. D B excedit id, quod bis sub A C, C B continetur [i]; quod autem bis continetur sub A D, D B excedit id quod bis sub A C, C B continetur rationali, etenim ambo rationalia sunt, utpote ex hypothesi rationalium dupla: igitur et quadrata ex A D, D B rationali excedent qua-
k 27. hujus. drata ex A C, C B; quod fieri non potest [k]; cum ambo sint media. Non igitur ipsi A B altera congruit, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. Quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, una tantum congruet recta linea. *Q. E. D.*

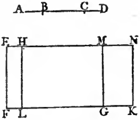
[LXXXV.] ## PROP. LXXXV. THEOR.

*Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.*

Sit cum medio medium totum faciens A B, ipsi vero congruens B C: ergo A C, C B potentiâ sunt incom-
l 79. hujus. mensurabiles [l], facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis A C, C B, continetur medium; et adhuc compositum ex quadratis ipsarum A C, C B incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis A C, C B. Dico ipsi A B alteram non congruere, potentiâ incommensurabilem toti, et cum totâ facientem ea, quæ proposita sunt.

Si enim fieri potest, congruat B D; ita ut A D, D B potentiâ incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum A D, D B quadratis medium; quod autem sub ipsis A D, D B continetur medium; et adhuc

huc compositum ex quadratis ipsarum A D, D B incommensurabile ei, quod continetur sub ipsis A D, D B. Exponatur rationalis E F; et quadratis ipsarum A C, C B æquale parallelogrammum E G ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E M; ei vero quod bis continetur sub A C, C B æquale parallelogrammum auferatur H G, latitudinem faciens H M: reliquum igitur quadratum ex A B est æquale parallelogrammo E L [m]. Ergo A B ipsum E L potest. Rursus, quadratis ex A D, D B æquale parallelogrammum E K ad ipsam E F applicetur, latitudinem faciens E N. Est autem et quadratum ex A B æquale parallelogrammo E L: ergo reliquum quod bis sub A D, D B continetur ipsi H K est æquale [m]. Et quoniam compositum ex quadratis ipsarum A C, C B medium est [n], et æquale parallelogrammo E G [o]; erit et E G medium. Et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens E M; quare E M est rationalis, sed ipsi E F longitudine incommensurabilis [p]. Rursus, quoniam quod bis sub A C, C B continetur est medium, (medii utique duplum) et æquale ipsi H G; erit et H G medium; et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens H M: rationalis igitur est H M, sed ipsi E F incommensurabilis longitudine [p]. Et quoniam compositum ex quadratis ex A C, C B incommensurabile est ei, quod bis sub A C, C B continetur; erit et E G incommensurabile ipsi H G; ideoque recta linea E M rectæ M H longitudine est incommensurabilis [q]. Et sunt ambæ rationales. Cum igitur E M, M H rationales sint, potentiâ solum commensurabiles; recta linea E H apotome est, et ipsi congruens H M [r]. Similiter demonstrabimus E H rursus apotomen esse, ipsique congruentem H N: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentiâ solum commensurabilis existens toti; quod fieri non posse ostensum est [s]. Non igitur ipsi A B altera congruet recta linea. Ipsi igitur A B una tantum congruet, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium,




[m] 7. secundi.
[n] ex hyp.
[o] Per construct.
[p] 23. hujus.
[q] 11. sexti, & 10. hujus.
[r] 74. hujus.
[s] 80. hujus.

 quod

quod autem ſub ipſis continetur medium, et adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei, quod continetur ſub ipſis. *Q. E. D.*

## DEFINITIONES TERTIÆ.

### Definitio I.

Expoſitâ rationali et apotomâ, ſi quidem tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; ſitque tota expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis: vocetur apotome prima.

### II.

Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, et tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

### III.

Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, et tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

### IV.

Rurſus ſi tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

### V.

Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

### VI.

Quod ſi neutra, dicatur apotome ſexta.

### SCHOLION.*

Manifeſtum eſt, geminas eſſe Binomiorum per detractionem ſeries (ἑξάδα utramque) priorum, formâ algebraicâ, ſigno tantum diſſimiles.

*Recensio Algebraica utriusque Ἑξάδος per detractionem.*

*Series Prima.*

I. Apotome; $a - \sqrt{\frac{m}{n}}\, b$. Vel etiam $\sqrt{\frac{m}{n}}\, a - \sqrt{\frac{p}{q}}\, b$.

II. Mediæ apotome prima; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{4}} a$.

III. Mediæ apotome ſecunda; $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a$.

IV. Minor; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right)$

V. Cum rationali medium totum efficiens;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right)$$

VI. Cum medio medium totum efficiens;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}} a \times \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\mu}{\nu+\mu}}}\right)$$

*Series Secunda.*

I. Apotome prima; $a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a$.

II. Apotome ſecunda; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu-\mu}}\, a - a$.

III. Apotome tertia; $\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\nu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi-\sigma}{\pi}}\, a$.

IV. Apotome quarta; $a - \sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a$.

V. Apotome quinta; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{\nu}}\, a - a$.

VI. Apotome ſexta; $\sqrt{\frac{\nu}{\nu+\mu}}\, a - \sqrt{\frac{\pi}{\pi+\sigma}}\, a$.

Series autem ſecunda oritur ex diviſione irrationalis ejus quæ prima eſt Seriei primæ in ſpecies, quas com-

plexa eſt, diverſas. Quod de Serie ſecundâ earum quæ per compoſitionem ſimiliter monendum erat.

Neque illud diſſimulandum: tertiam et ſextam ſecundæ utriuſque ſeriei Algebraice aliâ formâ, et elegantiori, repræſentari poſſe.

Nimirum, Seriei ſecundæ earum quæ per compoſitionem

III$^a$, quæ tertia eſt ex binis nominibus, hiſce notis ſignificabitur; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a + \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\,a$.

Hiſce, autem ejuſdem Seriei

VI$^a$, quæ ſexta eſt ex binis nominibus

$\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\,a + \sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a$.

Seriei item ſecundæ earum, quæ per detractionem, hiſce notis

III$^a$, quæ tertia eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a - \sqrt{\frac{\nu-\mu}{m}}\,a$.

Hiſce denique

VI$^a$, quæ ſexta eſt apotome; $\sqrt{\frac{\nu+\mu}{m}}\,a - \sqrt{\frac{\nu}{m}}\,a$.

Literâ ſcilicet $m$ numerum aliquem non quadratum deſignante, qui neque ad quadratum $\nu$, neque ad quadratorum $\nu$, $\mu$ differentiam $\nu - \mu$, vel ſummam $\nu + \mu$, numeri quadrati ad quadratum numerum rationem habeat.

---

[LXXXVI.]

## PROP. LXXXVI. PROBL.

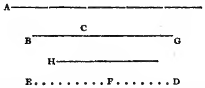
*Invenire primam apotomen.*

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit B G: ergo et B G eſt rationalis. Et exponantur duo quadrati numeri E D, E F, quorum exceſſus D F non ſit quadratus [t]: neque igitur E D ad D F rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Et fiat ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C.

[t] Cor. Lem. 4. hujus.

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex B G quadrato ex G C[v]. Rationale autem est quadratum ex B G; ergo[u] et quadratum ex G C est rationale: ideoque recta linea [u] 6. hujus.




G C rationalis est. Et quoniam E D ad D F rationem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est B G ipsi G C longitudine[x]. Et sunt ambæ rationales. [x] 9. hujus.
Ergo B G, G C rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id B C apotome est[y]. Dico et primam [y] 74. hujus.
esse. Sit enim quadratum ex H id, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Et quoniam est ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per conversionem ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex H[z]. Sed D E ad E F rationem [z] Cor. 19. quinti.
habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterque enim quadratus est[a]: ergo et quadratum [a] Per construct.
ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Commensurabilis igitur est B G ipsi H longitudine[x]. Et B G plus potest quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poterit quam G C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Atqui est tota B G expositæ rationali A commensurabilis longitudine. Ergo B G est apotome prima[c]. [c] Def. Tert. 1. hujus.

Inventa igitur est prima apotome. *Q. E. F.*

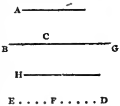
## PROP. LXXXVII. PROBL. [LXXXVII.]

*Invenire secundam apotomen.*

Exponatur rationalis A; et ipsi A longitudine commensurabilis sit C G: ergo C G est rationalis. Et exponantur duo numeri quadrati D E, E F[d], quorum ex- [d] Cor. Lem. 4. hujus.
cessus

cessus D F non sit quadratus. Fiatque ut F D ad D E, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Commensurabile igitur est quadratum ex C G qua-
[e] 6. hujus. drato ex G B[e]. Sed quadratum ex C G est rationale: ergo et rationale est quadratum ex G B; ac propterea ipsa G B est rationalis. Et quoniam quadratum ex C G ad quadratum ex G B rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; erit C G ipsi G B in-
[f] 9. hujus. commensurabilis longitudine[f].



Et ambæ sunt rationales. Ergo C G, G B rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et ob id B C est apo-
[g] 74. hujus. tome[g]. Dico et secundam esse. Sit enim quadratum ex H illud, quo quadratum ex B G excedit quadratum ex G C. Quoniam igitur est ut quadratum ex B G ad quadratum ex G C, ita E D numerus ad numerum D F; erit per conversionem rationis ut quadratum ex B G ad quadratum ex H, ita D E ad E F. Atque est uterque
[h] Per construct. ipsorum D E, E F quadratus[h]: quadratum igitur ex B G ad quadratum ex H rationem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque B G ipsi H longitudine est commensurabilis[f]. Et plus potest B G quam G C quadrato ex H[h]. Ergo B G plus potest quam G C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Atqui est congruens C G expositæ rationali A commensurabilis longitudine. Ergo B C est apotome
[i] Def. Tert. 2. hujus. secunda[i].

Inventa igitur est secunda apotome B C. *Q. E. F.*

[LXXXVIII.]

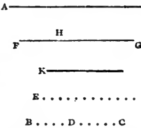
## PROP. LXXXVIII. PROBL.

*Invenire tertiam apotomen.*

Exponantur duo numeri quadrati B C, B D, qui ipso C D, non quadrato, differant. Exponatur alius non quadratus E, qui neque ad ipsum C D rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Denique exponatur rationalis quædam recta linea A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Commen-

Commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato [l] 6. hujus.
ex F G[l]. Atqui est quadratum ex A rationale: ergo et rationale est quadratum ex F G; ac propterea recta linea F G est rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine[m]. Rursus, quoniam est ut B C ad C D, ita [m] 9. hujus.
quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G quadrato ex G H commensurabile[l]. Rationale autem est quadratum ex F G; ergo et quadratum ex G H est rationale; et ob id recta linea G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est F G ipsi G H longitudine[m]. Et sunt ambæ rationales. Ergo F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: ac propterea apotome est F H[n]. Dico et tertiam esse. Quo- [n] 74. hujus.
niam enim est ut E quidem ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H[o]. [o] 22. quinti.
Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum[p]; neque igitur quadra- [p] Per constr.
tum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis[m]. Neutra igitur ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo autem recta F G plus potest quam G H, sit illud quod ex K fit quadratum. Quoniam igitur ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H[p]; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K[q]. [q] Cor. 19. quinti.




Sed

Sed numeri C B, B D ſunt quadrati. Ergo quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Com-
[r] 9. hujus. menſurabilis igitur eſt F G ipſi K longitudine [r]. Et plus poteſt F G quam G H quadrato ex K. Ergo F G plus poteſt quam G H quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Et neutra ipſarum F G, G H longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A.
[s] Def. Tert. 3. hujus. Quare F H eſt apotome tertia [s].

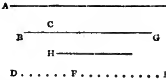
Inventa igitur eſt tertia apotome F H. *Q. E. F.*

[LXXXIX.]

## PROP. LXXXIX. PROBL.

*Invenire quartam apotomen.*

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit B G: ergo B G eſt rationalis. Exponantur præterea duo numeri D F, F E; ita ut totus D E ad




neutrum ipſorum D F, E F rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: et fiat ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C.

Commenſurabile igitur eſt quadratum ex B G qua-
[t] 6. hujus. drato ex G C [t]. Eſt autem quadratum ex B G rationale. Quare et rationale eſt quadratum ex G C; ideoque recta linea G C eſt rationalis. Et quoniam D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt B G
[u] 9. hujus. ipſi G C longitudine [u]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo B G, G C rationales ſunt, potentiâ ſolùm commenſurabiles;
[x] 74. hujus. et ob id B C eſt apotome [x]. Dico et quartam eſſe. Quo enim plus poteſt B G quam G C, ſit illud quadratum ex H. Et quoniam eſt ut D E ad E F, ita quadratum ex B G ad quadratum ex G C; erit per converſionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad quadratum

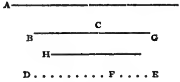
tum ex H. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum [y]. Incommenſurabilis igitur eſt B G ipſi H longitudine [a]. Et plus poteſt B G quam G C quadrato ex H [γ]. [γ] ex hyp. Ergo B G plus poteſt quam G C quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Atqui eſt tota B G longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali A. Ergo B C eſt apotome quarta [z]. [z] Def.

Inventa igitur eſt quarta apotome B C. *Q. E. F.* Tert. 4. hujus.

## PROP. XC. PROBL. [XC.]

*Invenire quintam apotomen.*

Exponatur rationalis A; et ipſi A longitudine commenſurabilis ſit C G: ergo C G eſt rationalis. Et exponantur duo numeri D F, F E; ita ut D E ad utrumque




ipſorum D F, F E rationem rurſus non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut F E ad E D, ita quadratum ex C G ad quadratum ex G B.

Ergo quadratum ex C G commenſurabile eſt quadrato ex G B [a]. Eſt autem quadratum ex C G rationale: ergo [a] 6. hujus. et rationale eſt quadratum ex G B; et idcirco recta linea G B eſt rationalis. Et quoniam ut D E ad E F, ita eſt quadratum ex B G ad quadratum ex G C; et D E ad E F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex G C rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt B G ipſi G C longitudine [b]. Et ſunt ambæ [b] 9. hujus. rationales. Ergo B G, G C rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id B C eſt apotome [c]. Dico et [c] 74. hujus. quintam eſſe. Quo enim majus eſt quadratum ex B G quam quadratum ex G C, ſit illud quadratum ex H.

Quoniam

Quoniam igitur quadratum ex B G ad quadratum ex G C est ut D E ad E F; erit per converfionem rationis ut E D ad D F, ita quadratum ex B G ad id quod fit ex H quadratum. Sed E D ad D F rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex B G ad quadratum ex H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ideoque recta linea B G ipfi H longitudine eft incommenfurabilis [b]. Et plus poteft B G quam G C quadrato ex H. Ergo B G plus poteft quam G C quadrato rectæ lineæ fibi incommenfurabilis longitudine. Atqui eft congruens C G expofitæ rationali A longitudine commenfurabilis [c]. Quare B C eft apotome quinta [d].

Inventa igitur eft quinta apotome B C. *Q. E. F.*

[b] 9. hujus.
[c] Per conftruct.
[d] Def. Tert. 5. hujus.

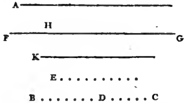
## [XCI.] PROP. XCI. PROBL.

*Invenire fextam apotomen.*

Exponantur duo numeri B D, D C tales, ut compofitus ex ipfis, B C, ad neutrum ipforum rationem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam numerus alius E, qui ad neutrum ipforum B C, C D rationem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Denique exponatur recta linea rationalis A; et fiat ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H.

Quoniam igitur eft ut E ad B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; erit quadratum ex A quadrato ex F G commenfurabile [e]. Rationale autem eft quadratum

[e] 6. hujus.




ex A: ergo et quadratum ex F G rationale erit; et ob id recta linea F G rationalis. Et quoniam E ad B C rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum [f]; neque quadratum ex A ad quadratum

[f] Per conftruct.

dratum ex F G rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommensurabilis igitur est A ipsi F G longitudine [g]. Rursus, quoniam est ut [g] 9. hujus. B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit quadratum ex F G commensurabile quadrato ex G H [h]. Est autem quadratum ex F G rationale; rationale [h] 6. hujus. igitur est et quadratum ex G H; et ipsa G H rationalis. Quod cum B C ad C D rationem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex F G ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo F G ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Et sunt ambæ rationales. Quare F G, G H rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; quapropter apotome est F H [i]. Dico et sextam esse. Quoniam enim est ut E ad [i] 74. hujus. B C, ita quadratum ex A ad quadratum ex F G; ut autem B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H: erit ex æquo ut E ad C D, ita quadratum ex A ad quadratum ex G H. Sed E ad C D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex G H rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo A ipsi G H longitudine est incommensurabilis [g]. Quare neutra ipsarum F G, G H expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. Quo plus potest recta F G quam G H, sit illud quadratum ex K. Et quoniam est ut B C ad C D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H; erit per conversionem rationis ut C B ad B D, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K [k]. [k] Cor. 19. quinti. At C B ad B D rationem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque igitur quadratum ex F G ad quadratum ex K rationem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Ergo incommensurabilis est F G ipsi K longitudine [l]. Et [l] 9. hujus. F G plus potest quam G H quadrato ex K. Plus igitur potest F G quam G H quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et neutra ipsarum F G, G H est longitudine commensurabilis expositæ rationali A. Ergo F H est apotome sexta [m].

Inventa est igitur sexta apotome F H. *Q. E. F.*

[m] Def. Tert. 6. hujus.

SCHOLION.

* SCHOLION.

Submonendum videtur in Tyronum gratiam, quod tamen ex Definitionum collatione, tertiarum cum secundis, facile quivis colliget; binomiorum nomina singula, ex quibus constant, eodem modo inter se habere, sive per compositionem sive per detractionem sint binomia, modo ejusdem sint ordinis in propriâ cujusque Serie. Nimirum, Majoris quæ vocatur nomina eodem modo inter se habent, ac nomina Minoris. Cum Major quarta sit in Serie primâ irrationalium binominum per compositionem, Minor itidem Seriei secundæ earum quæ per detractionem quarta. Similiter secundæ earum quæ ex binis nominibus eodem modo inter se habent nomina, quo nomina secundæ apotomes. Cum secunda ex binis nominibus secundæ Seriei earum quæ per compositionem sit secunda; secunda autem apotome, Seriei secundæ earum quæ per detractionem secunda.

Hinc autem efficitur eam esse rectarum quæ ex binis nominibus, et earum quæ apotomæ dicuntur, inter se cognationem; ut si duarum irrationalium altera sit ex binis nominibus, altera ejusdem ordinis apotome, si majus nomen ejus quæ ex binis nominibus Tota sit apotomes; minus nomen prioris apotomes Congruens erit. E contrario, si minus nomen sit Congruens, majus Tota erit.

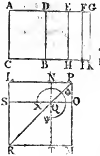
Neque tamen idcirco verum est, quod in Scholio imperiti nescio cujus hominis in libris antehac editis ferebatur, expeditius inveniendas esse sex apotomas, inveniendo eas quæ ex binis sunt nominibus, quam quâ ratione Euclides docuit; cum neque expeditior, neque facilior, neque alia est omnino, sed eadem plane illas quæ ex binis nominibus, quæ apotomas ipsas inveniendi ratio. Quod cuivis planum et apertum erit, qui problemata sex, quæ Definitiones Secundas subsecuta sunt, cum sex quæ tertias, ordine contulerit. Barrovius sane, nimio brevitatis studio, apotomῶν constructiones omisit, utpote ex binominum prius traditis facillime colligendas. Sed de viâ ad apotomas per binomines expeditiori sapientissimo Geometræ tacere placuit.

PROP.

## PROP. XCII. THEOR. [XCII.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ primâ, recta linea ſpatium potens apotome eſt.*

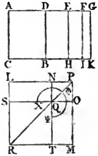
Contineatur enim ſpatium A B ſub rationali A C, et apotomâ primâ A D: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A B, apotomen eſſe.



Quoniam enim A D prima apotome eſt, ſit ipſi congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [r]. Et tota A G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; et præterea A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. Si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex D G, æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet [s]. Secetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Commenſurabilis igitur eſt A F ipſi F G longitudine. Et per E, F, G puncta ipſi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Et quoniam A F ipſi F G longitudine eſt commenſurabilis; erit et A G utrique ipſarum A F, F G commenſurabilis longitudine [t]. Sed A G commenſurabilis eſt ipſi A C: utraque igitur A F, F G ipſi A C longitudine eſt commenſurabilis [u]. Atqui eſt A C rationalis: ergo et rationalis utraque A F, F G; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K eſt rationale [x]. Cæterum D G utrique D E, E G commenſurabilis eſt longitudine nimirum cum utriuſque ſit dupla. Eſtque rationalis D G, ſed ipſi A C longitudine incommenſurabilis: ergo et utraque D E, E G rationalis eſt, et incommenſurabilis ipſi A C longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum D H, E K medium eſt [y]. Ponatur ipſi quidem A I parallelogrammo æquale quadratum L M [z]: parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur, communem cum ipſo angulum L P M habens, ſcilicet N O: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [a]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur. Itaque

[r] Def. Tert. 1. hujus.
[s] 18. hujus.
[t] 16. hujus.
[u] 12. hujus.
[x] 20. hujus.
[y] 22. & Cor. Def. 12. hujus.
[z] 14. ſecundi.
[a] 26. ſexti.

quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G, erit ut A F ad E G, ita E G ad F G [b]. Sed ut A F ad E G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K; et ut E G ad F G, ita parallelogrammum E K ad ipsum F K [c]. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N, ut superius ostensum est [d]; parallelogrammumque A I est æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K quadrato N O æquale [e]. Ergo et parallelogrammum M N est æquale ipsi E K.




[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] Lemma 7. hujus.
[e] Per construct.

Sed parallelogrammum quidem E K est æquale parallelogrammo D H [f]; parallelogrammum vero M N ipsi L O [g]. Parallelogrammum igitur D K est æquale gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O. Est autem et parallelogrammum A K quadratis L M, N O æquale [e]: ergo et reliquum A B est æquale quadrato S T. At quadratum S T est id, quod fit ex L N: quadratum igitur ex L N est æquale parallelogrammo A B; ideoque recta linea L N ipsum A B potest. Dico L N apotomen esse. Quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum A I, F K, et sunt æqualia quadratis L M, N O; erit et utrumque L M, N O rationale, hoc est, utrumque ipsorum, quæ fiunt ex L P, P N; et utraque igitur L P, P N rationalis est. Rursus, quoniam parallelogrammum D H est medium, atque est æquale ipsi L O; erit et L O medium. Cum igitur L O quidem medium sit, N O vero rationale; incommensurabile est L O ipsi N O; utque L O ad N O, ita est recta linea L P ad P N [h]. Ergo L P ipsi P N longitudine est incommensurabilis [i]. Et sunt ambæ rationales. Quare L P, P N rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: idcirco L N est apotome [k]. Et potest spatium A B. Quæ igitur potest spatium A B, est apotome.

[f] 36. primi.
[g] 43. primi.
[h] 1. sexti.
[i] 10. hujus.
[k] 74. hujus.

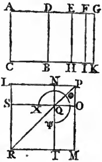
Ergo si spatium contineatur sub rationali et apotomâ primâ, recta linea spatium potens apotome est. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XCIII. THEOR. [XCIII.]

*Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ secundâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.*

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ secundâ A D: dico rectam lineam, quæ spatium A B potest, esse mediæ apotomen primam.




Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et congruens D G commensurabilis est expositæ rationali A C; totaque A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[l]. Quoniam igitur A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quartæ parti quadrati ipsius G D æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet[m]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ipsius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub A F, F G. Ergo commensurabilis est A F ipsi F G longitudine. Et per puncta E, F, G ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Quoniam igitur A F ipsi F G longitudine est commensurabilis; erit A G utrique ipsarum A F, F G commensurabilis longitudine[n]. Rationalis autem est A G, sed ipsi A C longitudine incommensurabilis: ergo et utraque A F, F G est rationalis, ipsique A C incommensurabilis longitudine; et ob id utrumque parallelogrammorum A I, F K medium est[o]. Rursus, quoniam D E commensurabilis est ipsi E G; erit et D G utrique D E, E G commensurabilis. Sed D G commensurabilis est ipsi A C longitudine. Ergo et utraque D E, E G rationalis est, et ipsi A C longitudine commensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum D H, E K est rationale[p]. Constituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M[q]; parallelogrammo autem F K æquale quadratum auferatur N O, communem cum ipso L M angulum L P M habens:

[l] Def. Tert. 2. hujus.

[m] 18. hujus.

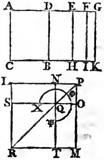
[n] 16. hujus.

[o] 22. hujus.

[p] 20. hujus.

[q] 14. secundi.

q 26. ſexti. ergo circa eandem diametrum ſunt quadrata L M, N O[q]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur. Cum igitur parallelogramma A I, F K media ſint, et ſibi ipſis commenſurabilia, et æqualia quadratis ex L P, P N; erunt et quadrata ex L P, P N media: ergo rectæ lineæ L P, P N mediæ ſunt, potentiâ commenſurabiles. Et quoniam rectangulum ſub A P, F G eſt æquale quadrato ex E G; erit ut A F ad E G, ita E G




r 17. ſexti. ad G F[r]. Sed ut A F ad E G, ita eſt parallelogrammum A I ad ipſum
s 1. ſexti. E K[s]; ut autem E G ad G F, ita parallelogrammum E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale eſt E K. Eſt autem et inter qua-
t Lemma 7. hujus. drata L M, N O medium proportionale M N[t]; et paral-
u Per conſtruct. lelogrammum A I quidem eſt æquale quadrato L M[u]; parallelogrammum vero F K æquale quadrato N O. Ergo
x 36. primi. M N ipſi E K eſt æquale. Sed D H eſt æquale ipſi E K[x],
y 43. primi. et L O ipſi M N[y]. Totum igitur D K gnomoni Ψ Φ X, et quadrato N O æquale erit. Itaque quoniam totum A K æquale eſt quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Ψ Φ X et quadrato N O; erit reliquum A B æquale S T, hoc eſt, ei, quod fit ex L N. Quadratum igitur ex L N eſt æquale ſpatio A B; ideoque recta linea L N ſpatium A B poteſt. Dico L N mediæ apotomen eſſe primam. Quoniam enim rationale eſt E K, et æquale ipſi M N, hoc eſt, ipſi L O; erit et L O rationale, illud ſc. quod ſub L P, P N continetur. Medium autem oſtenſum eſt N O. Quare L O eſt incommenſurabile ipſi N O;
z 11. ſexti. et ut L O ad N O, ita L P ad P N[z]: ergo L P, P N longitudine ſunt incommenſurabiles. Ac propterea L P, P N mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ ratio-
a 75. hujus. nale continent. Quare L N eſt mediæ apotome prima[a]; et poteſt ſpatium A B. Recta igitur linea, ſpatium A B potens, eſt mediæ apotome prima. *Q. E. D.*

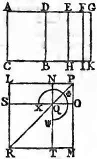
PROP.

## PROP. XCIV. THEOR. [XCIV.]

*Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ tertiâ, recta linea spatium potens mediæ est apotome secunda.*

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ tertiâ A D: dico rectam lineam, quæ potest spatium A B, mediæ esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum A G, G D longitudine commensurabilis est expositæ rationali A C; tota autem A G plus potest quam congruens D G quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine[b]. Quoniam ideo recta A G plus potest quam D G quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: si quartæ parti quadrati ipsius D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes commensurabiles ipsam dividet[c]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ipsius E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, sitque quod continetur sub A F, F G; et per puncta E, F, G ipsi A C parallelæ ducantur E H, F I, G K. Ergo A F, F G commensurabiles sunt; atque ob id parallelogrammum A I parallelogrammo F K est commensurabile. Et quoniam A F, F G commensurabiles sunt longitudine; erit et A G utrique ipsarum A F, F G longitudine commensurabilis[d]. Est autem rationalis A G, sed ipsi A C incommensurabilis longitudine; et utraque igitur A F, F G rationalis est, et ipsi A C longitudine incommensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum A I, F K est medium[e]. Rursus quoniam D E commensurabilis est ipsi E G longitudine; erit et D G utrique D E, E G commensurabilis. Sed D G rationalis est, et ipsi A C incommensurabilis longitudine: rationalis igitur est et utraque D E, E G, et ipsi A C longitudine incommensurabilis. Ergo utrumque parallelogrammorum D H, E K medium est[e]. Quod cum A G, G D potentiâ solum commensurabiles sint; A G ipsi G D longitudine erit incommensurabilis. Sed A G com-



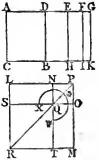

[b] Def. Tert. 3. hujus.

[c] 18. hujus.

[d] 16. hujus.

[e] 22. hujus.

menſurabilis eſt ipſi A F longitudine, et D G ipſi G E: eſt igitur A F ipſi E G longitudine incommenſurabilis [f]. Ut autem A F ad E G, ita parallelogrammum A I ad E K parallelogrammum [g]: ergo incommenſurabile eſt A I ipſi E K. Conſtituatur ipſi quidem A I æquale quadratum L M [h]; ipſi vero F K æquale auferatur quadratum N O, angulum habens eundem, quem L M: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [i]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur. Quoniam igitur rectangulum ſub A F, F G eſt æquale quadrato ex E G; erit ut A F ad E G, ita E G ad F G [k]. Ut autem A F ad E G, ita parallelogrammum A I ad E K parallelogrammum [g]; et ut E G ad G F, ita E K ad F K. Ergo et ut A I ad E K, ita E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale eſt E K. Eſt autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N; et parallelogrammum A I quidem æquale eſt quadrato L M, F K vero ipſi N O [l]: ergo et E K eſt æquale M N. Sed M N æquale eſt L O [m], et E K ipſi D H [n]. Totum igitur D K gnomoni Y Φ X et quadrato N O eſt æquale. Eſt autem et parallelogrammum A K æquale quadratis L M, N O. Ergo reliquum A B eſt æquale ipſi S T, hoc eſt, quadrato ex L N; et ob id recta linea L N ipſum A B ſpatium poteſt. Dico L N mediæ apotomen eſſe ſecundam. Quoniam enim parallelogramma A I, F K oſtenſa ſunt media, et ſunt æqualia quadratis ex L P, P N; erit et utrumque quadratorum ex L P, P N medium; igitur utraque recta linea L P, P N media eſt. Et quoniam commenſurabile eſt A I ipſi F K; erit et quadratum ex L P quadrato ex P N commenſurabile. Rurſus, quoniam oſtenſum eſt A I incommenſurabile ipſi E K; et L M ipſi M N incommenſurabile erit, hoc eſt, quadratum ex L P rectangulo ſub L P, P N. Quare et recta linea L P longitudine incommenſurabilis eſt ipſi P N. Sunt igitur L P, P N mediæ, potentiâ ſolum commenſurabiles. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim E K demonſtratum eſt medium, atque eſt æquale rectangulo ſub L P, P N; erit et rectangulum ſub L P, P N medium.




[f] 13. hujus.
[g] 1. ſexti.
[h] 14. ſecundi.
[i] 26. ſexti.
[k] 17. ſexti.
[l] Per conſtruct.
[m] 43. primi.
[n] 36. primi.

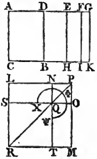
Ergo

Ergo L P, P N mediæ ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea L N eſt mediæ apotome ſecunda°; et poteſt ſpatium A B. Recta igitur linea, ſpatium A B potens, eſt mediæ apotome ſecunda. *Q. E. D.* ° 76. hujus.

## PROP. XCV. THEOR. [XCV.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quartâ, recta linea ſpatium potens minor eſt.*

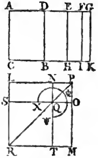
Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quartâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, minorem eſſe.




Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et A G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis[p]. Quoniam igitur A G plus poteſt quam G D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet[q]. Itaque ſecetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F ipſi F G longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta E, F, G ipſis A C, B D parallelæ E H, F I, G K. Quoniam igitur A G rationalis eſt, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; erit totum parallelogrammum A K rationale[r]. Rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt D G ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum D K medium[s]. Quod cum A F ipſi F G longitudine ſit incommenſurabilis; erit et parallelogrammum A I incommenſurabile F K[t]. Conſtituatur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; parallelogrammo autem F K æquale quadratum N O auferatur, angulum habens eundem L P M, quem L M. Quadrata igitur L M, N O circa eandem ſunt diametrum[u]. Sit ipſorum diameter P R; et figura deſcribatur.

p Def. Tert. 4. hujus.
q 19. hujus.
r 20. hujus.
s 22. hujus.
t 1. ſexti.
u 26. ſexti.

scribatur. Itaque quoniam rectangulum sub A F, F G est æquale quadrato ex E G; ut A F ad E G, ita erit E G ad G F [u]. Sed ut A F quidem ad F G, ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K [x]: ut autem E G ad F G, ita E K ad F K. Inter parallelogramma igitur A I, F K medium proportionale est E K. Est autem et inter quadrata L M, N O medium proportionale M N; atque est parallelogrammum A I æquale quadrato L M, et parallelogrammum F K æquale est ipsi N O [y]: est igitur E K æquale ipsi M N. Sed E K quidem est æquale parallelogrammo D H [z]; M N vero ipsi L O [a]. Totum igitur parallelogrammum gnomoni Υ Φ X, et quadrato N O est æquale. Et quoniam totum A K æquale est quadratis L M, N O, et D K æquale gnomoni Υ Φ X, et N O quadrato; erit reliquum A B æquale quadrato S T, hoc est, quadrato ex L N: ergo L N spatium A B potest. Dico L N irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum A K rationale est, et æquale quadratis ipsarum L P, P N; erit et compositum ex quadratis ipsarum L P, P N rationale. Rursus, quoniam parallelogrammum D K medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur sub L P, P N; erit et quod bis sub L P, P N continetur medium. Et quoniam ostensum est A I incommensurabile ipsi F K; erit et quadratum ex L P incommensurabile quadrato ex P N; ac propterea L P, P N potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium. Quare L N irrationalis est, quæ minor appellatur [b]. Et potest spatium A B. Recta igitur linea, spatium A B potens, minor est. *Q. E. D.*




[u] 17. sexti.
[x] 1. sexti.
[y] Per construct.
[z] 36. primi.
[a] 43. primi.
[b] 77. hujus.

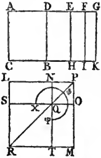
PROP.

## PROP. XCVI. THEOR. [XCVI.]

*Si ſpatium contineatur ſub rationali et apotomâ quintâ, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit.*

Spatium enim A B contineatur ſub rationali A C, et apotomâ quintâ A D: dico rectam lineam, quæ ſpatium A B poteſt, eſſe eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipſi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et congruens D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A C; totaque A G plus poteſt quam D G quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine [c]. Si igitur quartæ parti quadrati ex D G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommenſurabiles ipſam dividet [d]. Itaque ſecetur D G bifariam in puncto E; et quadrato ex E G æquale ad ipſam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, quod ſc. continetur ſub A F, F G. Ergo A F incommenſurabilis eſt ipſi F G longitudine. Ducantur per puncta E, F, G ipſi A C parallelæ E H, F I, G K. Et quoniam A G incommenſurabilis eſt ipſi A C longitudine, et ſunt ambæ rationales; erit parallelogrammum A K medium [e]. Rurſus, quoniam rationalis eſt D G, et ipſi A C longitudine commenſurabilis; parallelogrammum D K rationale erit [f]. Conſtituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum L M; ipſi vero F K æquale quadratum auferatur N O, angulum habens eundem, quem L M, videlicet L P M: ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum [g]. Sit diameter ipſorum P R; et figura deſcribatur. Similiter oſtendemus rectam lineam L N ſpatium A B poſſe. Dico L N eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim oſtendimus parallelogrammum A K medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum L P, P N; erit et compoſitum ex quadratis ipſarum L P, P N medium. Rurſus, quoniam D K rationale eſt, et æquale ei, quod bis




[c] Def. Tert. 5. hujus.

[d] 19. hujus.

[e] 22. hujus.

[f] 20. hujus.

[g] 26. ſexti.

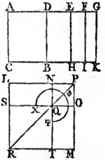
bis continetur sub L P, P N; erit et quod bis sub L P, P N continetur rationale. Et quoniam A I est incommensurabile ipsi F K, incommensurabile igitur est quadratum ex L P quadrato ex P N; ideoque L P, P N potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis bis continetur rationale. Ergo reliqua L N irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum
[a] 78. hujus. efficiens [b]; et potest spatium A B. Recta igitur linea, spatium A B potens, est quæ cum rationali medium totum efficit. *Q. E. D.*

[XCVII.] PROP. XCVII. THEOR.

*Si spatium contineatur sub rationali et apotomâ sextâ, recta linea spatium potens est quæ cum medio medium totum efficit.*

Spatium enim A B contineatur sub rationali A C, et apotomâ sextâ A D: dico rectam lineam, quæ spatium A B potest, esse eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit enim ipsi A D congruens D G: ergo A G, G D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et neutra ipsarum A G, G D commensurabilis est longitudine expositæ rationali A C; totaque A G plus potest quam congruens D G quadrato lineæ sibi longitudine incom-
[l] Def. Tert. 6. hujus. mensurabilis [l]. Itaque quoniam A G plus potest quam G D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: si quartæ parti quadrati ex D G æquale ad rectam lineam A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam
[k] 19. hujus. dividet [k]. Itaque secetur D G bifariam in E; et quadrato ex E G æquale parallelogrammum ad A G applicetur, deficiens figurâ quadratâ, nempe quod continetur sub A F, F G. Incommensurabilis igitur est A F ipsi F G longitudine. Ut autem A F ad F G, ita est
[l] 1. sexti. A I ad ipsum F K [l]: ergo A I ipsi F K est incommensu-
[m] 10. hujus. rabile [m]. Et quoniam A G, A C rationales sunt, potentiâ
[n] 22. hujus. solum commensurabiles; erit A K medium [n]. Rursus, quoniam



quoniam A C, D G rationales ſunt, et incommenſurabiles longitudine, medium erit et D K. Quod cum A G, G D potentiâ ſolum commenſurabiles ſint; erit A G ipſi G D longitudine incommenſurabilis. Sed ut A G ad G D, ita eſt A K ad K D[o]: incommenſurabile igitur eſt A K [o 1. ſexti.]
ipſi K D[p]. Itaque conſtituatur parallelogrammo A I [p 10. hujus.]
æquale quadratum L M[q]; parallelogrammo autem F K [q 14. ſecundi.]
æquale auferatur quadratum N O, angulum habens eundem, quem L M. Ergo quadrata L M, N O circa eandem ſunt diametrum[r]. Sit eorum diameter P R; et figura [r 26. ſexti.]
deſcribatur. Similiter ut ſupra oſtendemus rectam lineam L N poſſe ſpatium A B. Dico L N eſſe eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim A K oſtenſum eſt medium, atque eſt æquale quadratis ipſarum L P, P N; erit et compoſitum ex quadratis ipſarum L P, P N medium. Rurſus, quoniam D K oſtenſum eſt medium, et eſt æquale ei, quod bis continetur ſub L P, P N; et quod bis ſub L P, P N continetur medium erit. Et quoniam oſtenſum eſt A K incommenſurabile ipſi K D; ergo et quadrata ex L P, P N incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub L P, P N continetur. Et quoniam incommenſurabile eſt A I ipſi F K; erit et quadratum ex L P quadrato ex P N incommenſurabile. Ergo L P, P N potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, et adhuc quadrata ipſarum incommenſurabilia ei, quod bis ſub ipſis continetur. Ergo L N irrationalis eſt, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens[s]. Et poteſt A B ſpatium. Recta [s 79. hujus.]
igitur linea, ſpatium A B potens, eſt quæ cum medio medium totum efficit. *Q. E. D.*

## PROP. XCVIII. THEOR. [XCVIII.]

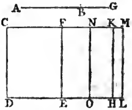
*Quadratum apotomæ, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam.*

Sit apotome A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen primam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles[t]. Et ad [t 74. hujus.]
ipſam C D applicetur quadrato quidem ex A G æquale

C H;

[u] 45. primi. C H; quadrato autem ex B G æquale K L [u]. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B; ex quibus parallelogrammum C E æquale est quadrato ex A B. Ergo reliquum F L ei, quod bis sub A G,




[x] 7. secundi. G B continetur, est æquale [x]. Secetur F M bifariam in N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur ipsorum F O, L N est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quadrata ex A G, G B rationalia sunt, atque est quadratis ex A G, G B æquale parallelogrammum D M; erit ipsum D M rationale. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: ergo C M est rationalis, et ipsi C D commensura-
[y] 21. hujus. bilis longitudine [y]. Rursus, quoniam medium est quod bis continetur sub A G, G B, estque ei, quod bis sub A G, G B continetur, æquale parallelogrammum L F; erit ipsum L F medium. Et applicatum est ad rationalem C D, latitudinem faciens F M. Quare F M est ra-
[z] 23. hujus. tionalis, ipsique C D longitudine incommensurabilis [z]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B rationalia sunt; quod autem bis continetur sub A G, G B medium: quadrata ex A G, G B incommensurabilia sunt ei, quod bis sub A G, G B continetur. Sed quadratis ex A G, G B æquale est parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur sub A G, G B æquale est F L: ergo C L ipsi F L est incommensurabile. Ut autem C L ad F L, ita est
[a] 1. sexti. recta linea C M ad M F [a]: incommensurabilis igitur est C M ipsi M F longitudine. Et sunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commen-
[b] 74. hujus. surabiles; ac propterea C F est apotome [b]. Dico et primam esse. Quoniam enim inter quadrata ex A G, G B
[c] Lemma 7. hujus. medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur [c]; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelo-
[d] Per construct. grammum C H [d]; ei vero quod sub A G, G B continetur æquale N L; et quadrato ex B G æquale K L: erit inter ipsa C H, K L medium proportionale N L. Ut igitur C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M. Ut autem N L ad K L, ita recta linea N M ad M K: ergo ut C K ad N M, ita est

N M

N M ad K M; et ob id rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex M N[d], hoc est, quartæ parti quadrati ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B[e]; erit et parallelogrammum C H parallelogrammo K L commensurabile. Sed ut C H ad K L, ita est recta linea C K ad ipsam K M; commensurabilis igitur est C K ipsi K M[f]. Itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales sint C M, M F, et quartæ parti quadrati ex F M æquale parallelogrammum ad ipsam C M applicatum sit, deficiens figurâ quadratâ, quod scilicet sub C K, K M continetur; sitque C K commensurabilis ipsi K M: recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis[g]. Atqui est C M commensurabilis longitudine expositæ rationali C D. Ergo C F est prima apotome[h].

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. *Q. E. D.*

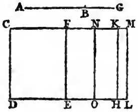
d 17. sexti.
e ex hyp.
f 10. hujus.
g 18. hujus.
h Def. Tert. 1. hujus.

## PROP. XCIX. THEOR. [XCIX.]

*Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.*

Sit mediæ apotome prima A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F; dico C F esse apotomen secundam.

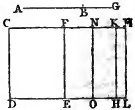
Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ rationale continent[i]. Et quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H ad C D applicetur, latitudinem faciens C K[k]; quadrato autem ex G B æquale K L ad eandem applicetur, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B, quæ media sunt. Quare et C L est medium. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: rationalis igitur est C M, et ipsi C D longitudine incommensurabilis[l]. Itaque quoniam C L est æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus quadratum ex A B æquale est parallelogrammo




i 75. hujus.
k 45. primi.
l 23. hujus.

C E;

C E; erit reliquum, sc. quod bis continetur sub A G,
m 7. secundi. G B, æquale ipsi F L [m]. Est autem quod bis sub A G, G B continetur rationale. Rationale igitur est et F L; et ad rationalem F E applicatum est, latitudinem faciens F M. Quare F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis lon-
n 21. hujus. gitudine [n]. Et quoniam quadrata quidem ex A G, G B, hoc est, parallelogrammum C L, medium est; quod autem




bis continetur sub A G, G B, videlicet F L, est rationale: erit C L incommensurabile ipsi F L. Ut autem C L ad
o 1. sexti. F L, ita recta linea C M ad M F [o]: ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis. Et sunt ambæ rationales. Sunt igitur C M, M F rationales, potentiâ solum
p 74. hujus. commensurabiles: ideoque C F est apotome [p]. Dico et secundam esse. Secetur enim F M bifariam in puncto N; et per N ipsi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L est æquale ei, quod continetur sub A G, G B. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est, quod sub A G, G B continetur; estque quadratum ex A G æquale parallelogrammo C H, quod autem continetur sub A G, G B æquale parallelogrammo N L, et quadratum ex G B æquale ipsi K L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita est recta linea C K ad ipsam N M, et ut N L ad K L, ita N M ad K M [o]. Ergo ut C K ad N M, ita est N M ad K M: ac propterea
q 17. sexti. rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato ex N M [q]; hoc est, quartæ parti quadrati ex F M. Et quoniam quadratum ex A G commensurabile est quadrato ex G B; erit et C H parallelogrammum parallelogrammo K L commensurabile, hoc est, recta linea C K commensurabilis ipsi K M. Quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F, quartæ autem parti quadrati ex M F æquale ad majorem C M applicatum fit, deficiens figurâ quadratâ, quod sc. continetur sub C K, K M, et in partes commensurabiles ipsam dividat; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi
r 18. hujus. commensurabilis longitudine [r]. Atque est congruens F M

expositæ

expositæ rationali C D commensurabilis[s]. Quare C F est apotome secunda[t]. [s] ex hyp. [t] Def.

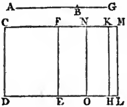
Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. *Q. E. D.* Tert. 2. hujus.

## PROP. C. THEOR. [C.]

***Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.***

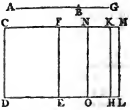
Sit mediæ apotome secunda A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F esse apotomen tertiam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B mediæ sunt, potentiâ solum commensurabiles, quæ medium continent[u]. Et quadrato quidem ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K[x]; quadrato autem ex G B æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B. Et sunt quadrata ex A G, G B media. Ergo et C L est medium; et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M: ergo C M est rationalis, sed ipsi C D incommensurabilis longitudine[y]. Et quoniam totum C L est æquale quadratis ex A G, G B, ex quibus C E æquale est quadrato ex A B; erit reliquum F L æquale ei, quod bis continetur sub A G, G B[z]. Secetur F M bifariam in N; et ipsi C D parallela ducatur N O. Alterutrum igitur parallelogrammorum F O, N L est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Est autem quod continetur sub A G, G B medium: ergo et medium est F L; et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens F M. Quare et F M est rationalis, sed ipsi C D longitudine incommensurabilis[y]. Et quoniam A G, G B potentiâ solum commensurabiles sunt; erit A G ipsi G B incommensurabilis longitudine: ideoque quadratum ex A G rectangulo sub A G, G B est incommensurabile[a]. Sed quadrato quidem ex A G commensurabilia sunt ex A G, G B quadrata; rectangulo autem sub A G, G B commensurabile est




[u] 76. hujus.
[x] 45. primi.
[y] 23. hujus.
[z] 7. secundi.
[a] 1. sexti. & 10. hujus.

eſt quod bis ſub A G, G B continetur: ergo quadrata ex A G, G B ſunt incommenſurabilia ei, quod bis ſub A G, G B continetur. At quadratis ex A G, G B æquale eſt parallelogrammum C L [b]; ei vero, quod bis continetur ſub A G, G B, æquale eſt F L: incommenſurabile igitur eſt C L ipſi F L. Ut autem C L ad F L, ita eſt recta linea C M ad F M: ergo C M ipſi F M incommenſurabilis eſt longitudine [c]. Et ſunt ambæ rationales. Quare C M, F M rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id C F eſt apotome [d]. Dico et tertiam eſſe. Quoniam enim quadratum ex A G commenſurabile eſt quadrato ex G B; erit parallelogrammum C H parallelogrammo K L commenſurabile: ergo et recta linea C K eſt commenſurabilis ipſi K M. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub A G, G B [e]; atque eſt quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H; quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo ſub A G, G B æquale N L; erit inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Eſt igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita eſt recta linea C K ad N M [f]; ut autem N L ad K L, ita N M ad K M; ergo et ut C K ad N M, ita N M ad K M. Ac propterea rectangulum ſub C K, K M eſt æquale quadrato ex N M [g], hoc eſt, quartæ parti quadrati ex F M. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex F M æquale ad C M applicatum eſt, deficiens figurâ quadratâ, quod in partes commenſurabiles ipſam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis [h]. Et neutra ipſarum C M, M F longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt apotome tertia [i].




Quadratum igitur mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. *Q. E. D.*

[b] Per conſtruct.
[c] 10. hujus.
[d] 74. hujus.
[e] Lemma 7. hujus.
[f] 1. ſexti.
[g] 17. ſexti.
[h] 18. hujus.
[i] Def. Tert. 3. hujus.

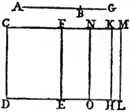
PROP.

## PROP. CI. THEOR. [CI.]

*Quadratum minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam.*

Sit minor A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipſam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F eſſe apotomen quartam.

Sit enim ipſi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A G, G B quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium[k]. Quadrato igitur ex A G æquale ad C D applicetur C H, latitudinem faciens C K[l]: quadrato autem ex B G æquale ad K H applicetur K L, latitudinem faciens K M.




k 77. hujus.

l 45. primi.

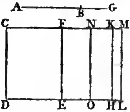
Totum igitur C L quadratis ex A G, G B eſt æquale. Atqui eſt compoſitum ex quadratis A G, G B rationale: ergo et rationale eſt C L; et ad rationalem C D applicatum eſt, latitudinem faciens C M. Quare C M eſt rationalis, et ipſi C D longitudine commenſurabilis[m]. Et quoniam totum C L eſt æquale quadratis ex A G, G B, C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur[n]. Itaque ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N alterutri ipſarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale ei, quod continetur ſub A G, G B. Et quoniam quod bis continetur ſub A G, G B medium eſt, et æquale parallelogrammo L F: erit et L F medium; et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M. Ergo F M eſt rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis[o]. Et quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum A G, G B eſt rationale, quod autem bis ſub A G, G B continetur medium; erunt quadrata ex A G, G B ei, quod bis continetur ſub A G, G B, incommenſurabilia. Quadratis autem ex A G, G B æquale eſt parallelogrammum C L, et ei, quod bis ſub A G, G B continetur, eſt æquale F L: incommenſurabile igitur eſt C L ipſi L F. Sed ut C L

m 21. hujus.

n 7. ſecundi.

o 23. hujus.

p 1. sexti. ad F L, ita est C M ad F M p. Quare C M ipsi F M lon-
q 10. hujus. gitudine est incommensurabilis q. Et sunt ambæ rationales. Ergo C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; et igitur C F est
r 74. hujus. apotome r. Dico et quartam esse. Quoniam enim A G, G B potentiâ sunt incommensurabiles; erit quadratum ex A G incommensurabile quadrato ex G B. Et quadrato quidem ex A G æquale parallelogram-




s Per construct. mum C H s; quadrato autem ex G B est æquale K L: incommensurabile igitur est C H ipsi K L. Sed ut C H ad K L, ita est C K ad K M. Ergo C K ipsi K M est incommensurabilis longitudine. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale est rectangulum sub
t Lemma 7. hujus. A G, G B t; atque est quadrato quidem ex A G æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L, et rectangulo sub A G, G B æquale N L; erit N L medium proportionale inter parallelogramma C H, K L. Est igitur ut C H ad N L, ita N L ad K L. Sed ut C H ad N L, ita C K ad M N. Et ut N L ad K L, ita M N ad K M. Ergo ut C K ad M N, ita M N ad K M; ac propterea rectangulum sub C K, K M est æquale quadrato
u 17. sexti. ex M N u, hoc est, quartæ parti quadrati ex M F. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M, M F; et quartæ parti quadrati ex M F æquale, ad C M applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, sc. contentum sub C K, K M; et in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ
x 19. hujus. lineæ sibi incommensurabilis longitudine x. Et est tota C M longitudine commensurabilis expositæ rationali C D.
y Def. Tert. 4. hujus. Ergo C F est apotome quarta y.

Quadratum igitur minoris, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quartam. *Q. E. D.*

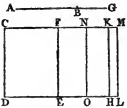
PROP.

## PROP. CII. THEOR. [CII.]

*Quadratum ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam.*

Sit quæ cum rationali medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale ad C D applicetur parallelogrammum C E, latitudinem faciens C F: dico C F apotomen esse quintam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B rectæ lineæ potentiâ sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale [a]. Et quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens CK [a]; quadrato autem ex G B æquale applicetur K L, latitudinem faciens K M. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B. Sed compositum ex quadratis ipsarum A G, G B est medium: ergo et medium est parallelogrammum C L. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem faciens C M. Quare C M est rationalis, sed ipsi C D longitudine incommensurabilis [b]. Et quoniam totum C L est æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis sub A G, G B continetur [c]. Itaque secetur F M bifariam in puncto N, et ab ipso N alterutri ipsarum C D, M L parallela ducatur N O. Utrumque igitur F O, N L est æquale ei, quod sub A G, G B continetur. Et quoniam quod bis continetur sub A G, G B rationale est, et æquale parallelogrammo F L; erit et F L rationale. Et ad rationalem E F applicatum est, latitudinem faciens F M. Ergo F M est rationalis, et ipsi C D commensurabilis longitudine [d]. Et quoniam parallelogrammum C L est medium, et F L rationale: incommensurabile est C L ipsi F L. Et ut C L ad F L, ita C M ad M F [e]. Ergo C M ipsi M F longitudine est incommensurabilis [f]. Et sunt ambæ rationales; quare C M, M F rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ideoque C F est apotome [g]. Dico et quintam esse.




[a] 78. hujus. [a] 45. primi. [b] 23. hujus. [c] 7. secundi. [d] 21. hujus. [e] 1. sexti. [f] 10. hujus. [g] 74. hujus.

Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub C K, K M esse æquale quadrato ex N M, hoc est, quartæ parti quadrati ex F M [h]. Quod cum quadratum ex A G incommensurabile sit quadrato ex G B; sitque quadratum ex A G parallelogrammo C H æquale, quadratum autem ex G B parallelogrammo K L: erit C H ipsi K L incommensurabile. Sed ut C H ad K L, ita C K ad K M. Ergo C K ipsi K M longitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ C M, M F inæquales sunt; et quartæ parti quadrati ex F M æquale, ad ipsam C M applicatum est, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; recta linea C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis [i]. Atqui est congruens F M commensurabilis longitudine expositæ rationali C D. Ergo C F est apotome quinta [k].

[h] Ut in præc.

[i] 19. hujus.

[k] Def. Tert. 5. hujus.

Quadratum igitur ejus, quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen quintam. *Q. E. D.*

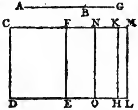
[CIII.]

## PROP. CIII. THEOR.

*Quadratum ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen sextam.*

Sit quæ cum medio medium totum efficit A B, rationalis autem C D; et quadrato ex A B æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F: dico C F esse apotomen sextam.

Sit enim ipsi A B congruens B G: ergo A G, G B potentiâ sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis A G, G B continetur medium, et adhuc quadrata ipsarum A G, G B incommensurabilia rectangulo, quod continetur sub ipsis A G, G B [l]. Itaque ad C D applicetur quadrato ex A G æquale parallelogrammum C H, latitudinem faciens C K; quadrato autem ex B G æquale applicetur K L. Totum igitur C L est æquale quadratis ex A G, G B: ac propterea C L est medium. Et ad rationalem C D applicatum est, latitudinem




[l] 79. hujus.

latitudinem faciens C M: ergo C M rationalis eſt, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis [m]. Quoniam igitur C L eſt æquale quadratis ex A G, G B; C E autem quadrato ex A B æquale; erit reliquum F L æquale ei, quod bis ſub A G, G B continetur [n]. Atqui eſt quod bis continetur ſub A G, G B medium: ergo et F L eſt medium. Et ad rationalem F E applicatum eſt, latitudinem faciens F M; eſt igitur F M rationalis, ſed ipſi C D longitudine incommenſurabilis. Et quoniam quadrata ex A G, G B incommenſurabilia ſunt ei, quod bis ſub A G, G B continetur; atque eſt quadratis quidem ex A G, G B æquale parallelogrammum C L, ei vero quod bis continetur ſub A G, G B æquale F L; erit C L ipſi F L incommenſurabile. Sed ut C L ad F L, ita eſt C M ad M F [o]. Quare C M ipſi M F incommenſurabilis eſt [o] longitudine [p]. Et ſunt ambæ rationales. Ergo C M, M F [p] rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles; et ob id C F eſt apotome [q]. Dico et ſextam eſſe. Quoniam [q] enim F L eſt æquale ei, quod bis continetur ſub A G, G B, ſecetur F M bifariam in puncto N; et per N ipſi C D parallela ducatur N O. Utrumque igitur parallelogrammorum F O, N L eſt æquale rectangulo ſub A G, G B. Et quoniam A G, G B potentiâ ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A G incommenſurabile quadrato ex G B. Sed quadrato quidem ex A G eſt æquale parallelogrammum C H, quadrato autem ex G B æquale K L [r]. Ergo C H ipſi K L eſt incommenſurabile. [r] Ut autem C H ad K L, ita eſt C K ad K M: incommenſurabilis igitur eſt C K ipſi K M [o]. Et quoniam inter quadrata ex A G, G B medium proportionale eſt rectangulum ſub A G, G B [s]; eſtque quadrato ex A G æquale C H, et [s] quadrato ex G B æquale K L, rectanguloque ſub A G, G B æquale N L; erit et inter parallelogramma C H, K L medium proportionale N L. Et eâdem ratione ac in ſuperiori C M plus poterit quam M F quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et neutra ipſarum eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali C D. Ergo C F eſt ſexta apotome [t].

Quadratum igitur ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen ſextam. *Q. E. D.*

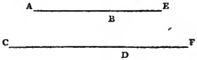
[m] 23. hujus.
[n] 7. ſecundi.
[o] 1. ſexti.
[p] 10. hujus.
[q] 74. hujus.
[r] Per conſtruct.
[s] Lemma 7. hujus.
[t] Def. Tert. 6. hujus.

[CIV.] PROP. CIV. THEOR.

*Recta linea apotomæ longitudine commenſurabilis, et ipſa apotome eſt, atque ordine eadem.*

Sit apotome A B, et ipſi A B longitudine commenſurabilis ſit C D: dico C D apotomen eſſe, atque ordine eandem, quæ A B.

Quoniam enim A B eſt apotome, ſit ipſi congruens B E: ergo A E, E B rationales ſunt, potentiâ ſolum com-
y 74. hujus. menſurabiles [y]. Et fiat ratio B E ad D F eadem, quæ




eſt A B ad C D. Quare ut una ad unam, ita erunt
z 12. quinti. omnes ad omnes [z]: eſt igitur ut tota A E ad totam C F, ita A B ad C D. Commenſurabilis autem eſt A B ipſi C D longitudine. Ergo et A E ipſi C F longitudine com-
a 10. hujus. menſurabilis erit, et B E ipſi D F [a]. Sunt autem A E, E B rationales, potentiâ ſolum commenſurabiles. Ergo et C F, F D rationales erunt, potentiâ ſolum commenſu-
a 74. hujus. rabiles [a]; ac propterea C D eſt apotome [a]. Dico et ordine eandem eſſe, quæ A B. Quoniam enim eſt ut A E ad C F, ita B E ad F D; erit permutando ut A E ad E B,
b 16. quinti. ita C F ad F D [b]. Vel igitur A E plus poteſt quam E B quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si quidem A E plus poteſt quam E B quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Et ſi quidem A E commenſurabilis eſt longitudine expoſitæ rationali, et C F etiam erit. Si vero E B eſt commenſurabilis, et D F commenſurabilis erit. Et ſi neutra ipſarum A E, E B commenſurabilis eſt longitudine expoſitæ rationali, et neutra ipſarum C F, F D eidem longitudine erit commenſurabilis. Quod ſi A E plus poſſit quam E B quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, et C F plus poterit quam F D quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Et ſi quidem A E ſit commenſurabilis expoſitæ rationali longitudine, et C F eidem

eidem longitudine commenfurabilis erit. Si vero B E, et F D. Et fi neutra ipfarum A E, E B, et neutra ipfarum C F, F D erit expofitæ rationali longitudine commenfurabilis. Ergo C D apotome eft, et ordine eadem, quæ A B[c]. *Q. E. D.*

[c] Def. Tert.

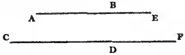
## PROP. CV. THEOR. [CV.]

*Recta linea mediæ apotomæ commenfurabilis, et ipfa mediæ apotome eft, atque ordine eadem.*

Sit mediæ apotome A B, et ipfi A B longitudine commenfurabilis fit C D: dico C D mediæ apotomen effe, et ordine eandem, quæ A B.

Quoniam enim mediæ apotome eft A B, fit B E ipfi A B congruens. Ergo A E, E B mediæ funt, potentiâ folum commenfurabiles[d]. Et fiat ut A B ad C D, ita B E

[d] 75. & 76. hujus.



ad D F. Sunt autem A E, E B mediæ, potentiâ folum commenfurabiles. Ergo et C F, F D mediæ potentiâ folum commenfurabiles erunt; ac propterea mediæ apotome eft C D. Oftendendum eft et ordine eandem effe, quæ A B. Quoniam enim ut A E ad E B, ita C F ad F D; ut autem A E ad E B, ita quadratum ex A E ad rectangulum fub A E, E B[e]; et ut C F ad F D, ita quadratum ex C F ad rectangulum fub C F, F D: erit et ut quadratum ex A E ad rectangulum fub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum fub C F, F D. Permutando igitur eft ut quadratum ex A E ad quadratum ex C F, ita rectangulum fub A E, E B ad rectangulum fub C F, F D. Sed quadratum ex A E commenfurabile eft quadrato ex C F: rectangulum igitur fub A E, E B rectangulo fub C F, F D eft commenfurabile. Et fi quidem rationale eft rectangulum fub A E, E B, et rectangulum fub C F, F D rationale erit: fi vero rectangulum fub A E, E B medium eft, et medium erit rectangulum fub C F, F D. Mediæ igitur apotome eft C D, atque ordine eadem, quæ A B. *Q. E. D.*

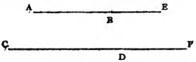
[e] 1. fexti.

[CVI.] PROP. CVI. THEOR.

*Recta linea minori commensurabilis, et ipsa minor est.*

Sit minor A B, et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico et C D minorem esse.

Fiant enim eadem, quæ prius. Et quoniam A E, E B potentiâ sunt incommensurabiles, et C F, F D potentiâ incommensurabiles erunt. Quoniam autem est ut A E

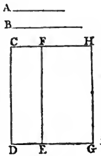



ad E B, ita C F ad F D: erit et ut quadratum ex A E ad quadratum ex E B, ita quadratum ex C F ad quadratum
[f] 22. sexti. ex F D [f]; et componendo ut quadrata ex A E, E B ad quadratum ex E B, ita quadrata ex C F, F D ad quadra-
[g] 18. quinti. tum ex F D, et permutando [g]. Commensurabile autem est quadratum ex B E quadrato ex D F. Ergo et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B composito ex
[h] 10. hujus. quadratis ipsarum C F, F D commensurabile erit [h]. Sed compositum ex quadratis ipsarum A E, E B est rationale: ergo et rationale erit compositum ex quadratis ipsarum C F, F D. Rursus, quoniam est ut quadratum ex A E ad rectangulum sub A E, E B, ita quadratum ex C F ad rectangulum sub C F, F D, et permutando; commensurabile autem est quadratum ex A E quadrato ex C F: erit igitur et rectangulum sub A E, E B rectangulo sub C F, F D commensurabile. Sed rectangulum sub A E, E B medium est: medium igitur est et rectangulum sub
[l] 24. hujus. C F, F D [l]. Quare C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium.
[k] 77. hujus. Ergo C D est minor [k]. *Q. E. D.*

Aliter. Sit minor A, et ipsi A commensurabilis sit B: dico B minorem esse.

Exponatur enim C D rationalis, et quadrato ex A æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur,
[l] 101. hujus. latitudinem faciens C F. Apotome igitur quarta est C F [l]. Quadrato autem ex B æquale ad F E applicetur F G, latitudinem

latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. Sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum C E, quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E commensurabile est ipsi F G. Ut autem C E ad F G, ita C F ad F H[m]: commensurabilis igitur est C F ipsi F H longitudine[n]. Sed C F est apotome quarta. Ergo et F H apotome quarta est[o]. Ergo et spatium F G sub rationali et apotomâ quartâ continetur: recta igitur linea spatium potens minor est[p]. Potest autem spatium F G ipsa B. Ergo B est minor. *Q. E. D.*



[m] 1. sexti.

[n] 10. hujus.

[o] 104. hujus.

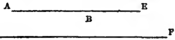
[p] 95. hujus.

PROP. CVII. THEOR. [CVII.]

*Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, et ipsa cum rationali medium totum efficiens est.*

Sit cum rationali medium totum efficiens A B. Et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico C D esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi A B congruens B E. Ergo A E, E B potentiâ incommensurabiles sunt[q], facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub [q] 78. hujus.

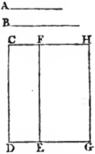


ipsis continetur rationale. Et eadem construantur. Similiter demonstrabitur, atque prius, C F, F D in eâdem esse ratione, in quâ A E, E B; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum C F, F D; rectangulum autem sub A E, E B rectangulo sub C F, F D commensurabile. Quare et C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum C F, F D medium, quod autem sub ipsis continentur rationale. Ergo C D est, quæ cum rationali medium totum efficit[q]. *Q. E. D.*

Aliter.

Aliter. Sit cum rationali medium totum efficiens A, et ipsi A sit commensurabilis B: dico B esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis C D, et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum C E ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens C F. Ergo C F est apotome




r 102. hujus. quinta r. Quadrato autem ex B æquale F G ad ipsam F E applicetur, latitudinem faciens F H. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B; erit et quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. Sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum C E; quadrato autem ex B æquale F G. Ergo C E est commensurabile ipsi F G; et ob id recta linea C F ipsi F H longitudine est commensurabilis. Apotome autem quinta

s 104. hujus. est C F. Ergo et F H est apotome quinta s; estque F E rationalis. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotomâ quintâ, recta linea spatium potens est quæ

t 96. hujus. cum rationali medium totum efficit t. Sed ipsa B potest

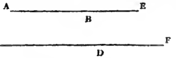
u Per construct. spatium F G u. Ergo ipsa B cum rationali medium totum efficiens est. *Q. E. D.*

[CVIII.] PROP. CVIII. THEOR.

*Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, et ipsa cum medio medium totum efficiens est.*

Sit cum medio medium totum efficiens A B, et ipsi A B commensurabilis sit C D: dico C D esse eam, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipsi A B congruens B E; et eadem construantur. Ergo A E, E B potentiâ incommensurabiles sunt, facientes




x 79. hujus. compositum ex quadratis ipsarum medium x, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex

ipsarum

ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Et sunt A E, E B commensurabiles ipsis C F, F D ut in superioribus ostensum est; et compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile composito ex quadratis ipsarum C F, F D; rectangulumque sub A E, E B rectangulo sub C F, F D. Ergo C F, F D potentiâ incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem sub ipsis continetur medium, et adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei, quod sub ipsis continetur. Ergo C D est quæ cum medio medium totum efficit[z]. *Q. E. D.* [z] 79. hujus.

### * SCHOLION.

De mutuo Irrationalium uniuscujusque Ἐξάδος inter se commensu, in decem hujus Libri propositionibus Euclides pertractavit: quarum quinque, nimirum quæ septima sexagesima numeratur, quæque ab eâ quatuor sunt proximæ, irrationales per compositionem respiciunt; quinque aliæ, a quartâ post centesimam incipientes, eas quæ per detractionem sunt irrationales. Ad pleniorem subtilissimæ doctrinæ intelligentiam, illud, ut opinor, haud inutile erit, e Clavio monuisse: ex decem propositionibus, quas memoravimus, duas, lxvii[m] dico et civ[m], latius non sumendas quam ab Euclide pronuntiatæ sunt; de rectis scilicet ipsâ longitudine commensurabilibus. Quamquam enim ei quæ ex binis est nominibus, vel ei quæ apotome, vel potentiâ tantum commensurabilis et ipsa ex binis nominibus aut apotome erit; haud tamen necessario ejusdem ordinis, cujus illa cui eo modo est commensurabilis. Propositiones autem octo reliquæ (68, 69, 70, 71; 105, 106, 107, 108.) apud commensurabiles potentiâ tantum æque ac longitudine vigent. Ut demonstrationes, quibus singulæ confirmatæ sunt, accurate perpendenti manifestum erit.

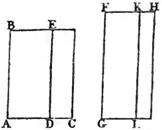
### PROP. CIX. THEOR. [CIX.]

*Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum spatium potest una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.*

De rationali enim B C medium B D detrahatur: dico eam quæ reliquum spatium E C potest unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G; et parallelogrammo quidem B C æquale G H ad F G applicetur; parallelogrammo autem B D æquale auferatur G K: reliquum igitur C E est æquale L H. Itaque quoniam rationale est B C, medium autem B D; atque est B C æquale G H, et B D ipsi G K; erit G H rationale, medium autem




G K; et ad rationalem F G utrumque applicatum est. Rationalis igitur est F H, et ipsi F G longitudine commensurabilis[a], F K vero rationalis et incommensurabilis ipsi F G longitudine[z]. Ergo F H ipsi F K longitudine incommensurabilis est[b]: quare F H, F K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles: ac propterea K H est apotome, ipsi vero congruens K F[c]. H F igitur plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Possit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. Atqui est tota H F commensurabilis longitudine expositæ rationali F G. Ergo K H est apotome prima[d]. Recta autem linea, quæ potest spatium sub rationali et apotomâ primâ contentum, est apotome[e]. Ergo quæ potest L H, hoc est, ipsum C E, apotome est. Quod si H F plus possit quam F K quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, estque tota H F expositæ rationali F G longitudine commensurabilis; erit K H apotome quarta[f]. Et quæ potest spatium sub rationali et apotomâ quartâ contentum minor est[g]. Quæ igitur potest spatium L H, hoc est, ipsum E C, est minor. *Q. E. D.*

[a] 21. hujus.
[z] 23. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 74. hujus.
[d] Def. Tert. 1. hujus.
[e] 92. hujus.
[f] Def. Tert. 4. hujus.
[g] 95. hujus.

[CX.] PROP. CX. THEOR.

*Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.*

Vide fig. Prop. 109. De medio enim B C rationale B D detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum spatium E C potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur

Exponatur enim rationalis F G, et ad ipsam similiter spatia applicentur [h]; erit rationalis quidem F H, et ipsi F G longitudine incommensurabilis [i]. Rationalis autem F K, et commensurabilis ipsi F G longitudine [k]: ergo F H, F K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles; ac propterea H K est apotome, et ipsi congruens F K [l]. F H igitur plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi longitudine vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem H F plus potest quam F K quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; quoniam congruens F K commensurabilis est expositæ rationali F G longitudine: erit H K apotome secunda [m]. Est autem F G rationalis. Ergo quæ potest spatium L H, hoc est, ipsum C E, est mediæ apotome prima [n]. Quod si H F plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quoniam congruens F K commensurabilis est expositæ rationali F G longitudine: erit H K apotome quinta [o]. Recta igitur linea potens spatium E C est quæ cum rationali medium totum efficit [p]. *Q. E. D.*

[h] Ut in præc. [i] 23. hujus. [k] 21. hujus. [l] 74. hujus. [m] Def. Tert. 2. hujus. [n] 93. hujus. [o] Def. Tert. 5. hujus. [p] 96. hujus.

## PROP. CXI. THEOR. [CXI.]

*Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.*

Detrahatur ut in propositis figuris de medio B C medium B D, quod sit incommensurabile toti: dico rectam lineam, quæ potest spatium C E, unam esse ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen secundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.

Vide fig. Prop. 109.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum B C, B D, et B C incommensurabile est ipsi B D, hoc est, G H ipsi G K; erit H F ipsi F K incommensurabilis longitudine [q]. Ergo H F, F K rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [r]; et ob id H K est apotome, et ipsi congruens K F [s]. Itaque H F plus potest quam F K quadrato rectæ lineæ longitudine sibi vel commensurabilis, vel incommensurabilis. Et si quidem H F plus potest quam F K quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum neutra ipsarum H F, F K commensurabilis sit expositæ rationali F G longitudine; erit H K apotome tertia [t]. Rationalis autem est K L. Quæ vero potest rectangulum, sub rationali et apotomâ tertiâ contentum,

[q] 1. sexti, & 10. hujus. [r] 23. hujus. [s] 74. hujus. [t] Def. Tert. 3. hujus.

u 94. hujus. tentum, mediæ eſt apotome ſecunda [u]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt ipſum C E, mediæ eſt apotome ſecunda. Si vero H F plus poteſt quam F K quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; cum neutra ipſarum H F, F K longitudine commenſurabilis

x Def. Tert. 6. hujus. ſit expoſitæ rationali F G; erit H K apotome ſexta [x]. At recta linea, potens quod ſub rationali et apotomâ ſextâ continetur, eſt quæ cum medio medium totum

y 97. hujus. efficit [y]. Ergo quæ poteſt ſpatium L H, hoc eſt, ipſum E C, eſt cum medio medium totum efficiens. *Q. E. D.*

## [CXII.] PROP. CXII. THEOR.

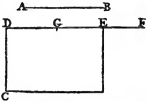
*Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.*

Sit apotome A B: dico A B non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus.

Sit enim, ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis D C, et quadrato ex A B æquale rectangulum C E ad ipſam D C applicetur, latitudinem

z 45. primi. faciens D E [z]. Quoniam igitur A B eſt apotome, erit

a 98. hujus. D E apotome prima [a]. Sit ipſi congruens E F. Ergo D F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſu-




b Def. Tert. 1. hujus. rabiles [b], et D F plus poteſt quam F E quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt D F commenſurabilis expoſitæ rationali C D longitudine.

c ex hyp. Rurſus, quoniam A B eſt ex binis nominibus [c], erit D E

d 61. hujus. ex binis nominibus prima [d]. Dividatur in nomina ad punctum G, ſitque D G majus nomen. Ergo D G, G E

e Def. Secund. 1. hujus. rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles [e]. Et D G plus poteſt quam G E quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, et major D G longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali D C. Quare D F

f 12. hujus. ipſi D G longitudine eſt commenſurabilis [f]; et reliquæ igitur F G commenſurabilis erit. Itaque quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G, atque eſt rationalis D F; erit et F G rationalis. Rurſus, quoniam D F commenſurabilis eſt ipſi F G longitudine, atque eſt D F ipſi F E incommenſurabilis longitudine; erit et F G ipſi F E longitudine incommenſurabilis. Et ſunt rationales. Ergo G F, F E rationales ſunt, potentiâ ſolum commenſurabiles;

ſurabiles; ac propterea E G eſt apotome [g]. Sed et rationalis, quod fieri non poteſt. [g] 74. hujus.

Ergo apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Ex demonſtratis quoque facile colligere licebit, apotomen, et cæteras ipſam conſequentes irrationales lineas, neque medias eſſe, neque inter ſe eaſdem.

Quadratum enim mediæ ad rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit rationalem, ipſi rationali longitudine incommenſurabilem [h]. [h] 23. hujus.

At quadratum apotomæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen primam [i]. Et quadratum [i] 98. hujus. mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen ſecundam [k]. Quadratum vero [k] 99. hujus. mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen tertiam [l]. Quadratum [l] 100. hujus. deinde Minoris ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quartam [m]. At vero quadratum ejus, [m] 101. hujus. quæ cum rationali medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen quintam [n]. [n] 102. hujus. Quadratum denique ejus, quæ cum medio medium totum efficit, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit apotomen ſextam [o]. Itaque cum hæ latitudines [o] 103. hujus. differant et a latitudine mediæ, et inter ſe; a latitudine quidem mediæ, quod hæc rationalis ſit, illæ vero irrationales; inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem apotomæ: manifeſtum eſt, apotomen, et reliquas irrationales ipſam conſequentes, et a media, et inter ſe differre. Quoniam vero in hoc theoremate demonſtravimus, apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: et quadrata apotomæ, et cæterarum quinque irrationalium eam conſequentium, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, et ſextam: at vero quadrata ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum quinque irrationalium, quæ ipſam ſequuntur, ad rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, ac ſextam: liquido conſtat, latitudines apotomæ, et aliarum irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus ejus, quæ ex binis nominibus, et reliquarum poſt ipſam irratio-

irrationalium: quandoquidem nulla apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur et apotome, et quæ ipſam ſequuntur, differunt ab eâ, quæ ex binis nominibus, et quæ poſt ipſam. Quamobrem cum tam illæ, quam hæ a mediâ ſint diverſæ; efficitur, rationali quâpiam expoſitâ, viginti tres numero eſſe lineas irrationales, inter ſe diverſas, de quibus hactenus Euclides in hoc libro diſſeruit. Sunt autem hæ,

1. Media.
2. Ex binis mediis prima.
3. Ex binis mediis ſecunda.
4. Major.
5. Rationale ac medium potens.
6. Bina media potens.
7. Ex binis nominibus prima.
8. ———————— ſecunda.
9. ———————— tertia.
10. ———————— quarta.
11. ———————— quinta.
12. ———————— ſexta.
13. Mediæ apotome prima.
14. Mediæ apotome ſecunda.
15. Minor.
16. Cum rationali medium totum efficiens.
17. Cum medio medium totum efficiens.
18. Apotome prima.
19. ———— ſecunda.
20. ———— tertia.
21. ———— quarta.
22. ———— quinta.
23. ———— ſexta.

In hâc recenſione, neque ejus quæ ex binis nominibus ſimpliciter vocata eſt, neque ejus quæ ſimpliciter apotome, quarum altera primæ ἑξάδος earum quæ per compoſitionem, altera primæ earum quæ per detractionem prima eſt, ullam ſeorſum mentionem fecimus. Quoniam utramque in ſpecies diviſam, ut ſupra monuimus, ἑξάδες poſteriores ſiſtunt. Ne cui igitur mirari ſubeat numerum linearum, quæ quatuor ἑξάδας conficiunt, accedente mediâ ipſâ extra omnem ἑξάδα, ad viginti quinque non aſſurgere.

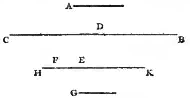
PROP.

## PROP. CXIII. THEOR. [CXIII.]

*Quadratum rationalis, ad eam quæ ex binis nominibus applicatum, latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem; quem ea quæ est ex binis nominibus.*

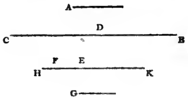
Sit rationalis A; ea quæ est ex binis nominibus B C, cujus majus nomen C D; et quadrato ex A æquale rectangulum sit, quod sub B C, E F continetur: dico E F apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis C D, D B, et in eâdem ratione; et adhuc E F eundem ordinem habere, quem habet B C.

Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod sub B D et G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum sub B C, E F est æquale ei, quod




sub B D, G continetur; erit ut C B ad B D, ita G ad E F [p]. Major autem est C B quam B D. Ergo et G quam E F major erit. Sit ipsi G æqualis E H. Est igitur ut C B ad B D, ita H E ad E F; et dividendo, ut C D ad D B, ita H F ad F E [q]. Fiat ut H F ad F E, ita F K ad K E. Ergo et tota H K ad totam K F est ut F K ad K E; ut enim unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia [r]. Sed ut F K ad K E, ita C D ad D B; et igitur ut H K ad K F, ita C D ad D B. Commensurabile autem est quadratum ex C D quadrato ex D B [s]. Ergo et quadratum ex H K quadrato ex K F est commensurabile [t]. Atqui est ut quadratum ex H K ad quadratum ex K F, ita recta linea H K ad K E, quoniam tres rectæ lineæ H K, K F, K E deinceps proportionales sunt [u]: commensurabilis igitur est H K ipsi K E longitudine. Ergo et H E ipsi E K longitudine est

[p] 16. sexti.
[q] 17. quinti.
[r] 12. quinti.
[s] 37. hujus.
[t] 10. hujus.
[u] Cor. 2. 20. sexti.




x 16. hujus. commensurabilis [x]. Et quoniam quadratum ex A est æquale ei, quod sub H E, B D continetur, rationale autem est quadratum ex A: erit et quod sub H E, B D continetur rationale. Et ad rationalem B D applicatum est; rationalis igitur est H E, et ipsi B D longitudine commen-
y 21. hujus. surabilis [y]; ideoque et E K, quæ est commensurabilis ipsi H E, rationalis erit, et ipsi B D commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est ut C D ad D B, ita F K ad K E; sunt autem C D, D B potentiâ solum commensurabiles; et F K, K E potentiâ solum commensurabiles erunt. Rationalis autem est K E, et ipsi B D commensurabilis longitudine. Quare et F K est rationalis, ipsique C D longitudine commensurabilis. Sunt igitur F K, K E rationales, et potentiâ solum commensurabiles; et id-
z 74. hujus. circo E F apotome est [z]. Jam vero C D plus potest quam D B quadrato rectæ lineæ sibi vel commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Et si quidem C D plus potest quam D B quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, etiam F K plus poterit quam K E quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Et si C D est commensurabilis expositæ rationali longitudine, et F K eidem commensurabilis erit. Si autem B D, et K E. Et si neutra ipsarum C D, D B, et neutra ipsarum F K, K E. Quod si C D plus potest quam D B quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, et F K plus poterit quam K E quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem C D est longitudine commensurabilis expositæ rationali, erit et F K eidem commensurabilis. Et si B D, et K E. At si neutra ipsarum C D, D B, et neutra ipsarum F K, K E. Ergo F E apotome est, cujus nomina F K, K E commensurabilia sunt nominibus C D, D B ejus quæ est ex binis nominibus, et in eâdem ratione; et eundem habet ordinem, quem C B. *Q. E. D.*

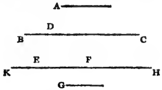
PROP.

## PROP. CXIV. THEOR. [CXIV.]

*Quadratum rationalis, ad apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; et adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quem ipsa apotome.*

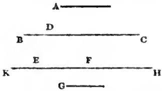
Sit rationalis quidem A, apotome autem B D; et quadrato ex A æquale fit quod sub B D, K H continetur, ita ut quadratum rationalis A, ad B D applicatum, latitudinem faciat K H: dico K H esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius B D, et in eâdem ratione; et K H eundem habere ordinem, quem habet B D.

Sit enim ipsi B D congruens D C. Ergo B C, C D rationales sunt, potentiâ solum commensurabiles [a]. Et [a] quadrato ex A æquale fit quod sub B C, G continetur. [a] 74. hujus.



Rationale autem est quadratum ex A. Ergo quod sub B C, G continetur est rationale. Et ad rationalem B C applicatum est: rationalis igitur est recta linea G, ipsique B C longitudine commensurabilis [b]. Sed quoniam rectangulum, contentum sub B C, G, est æquale ei, quod sub B D, K H continetur; erit ut C B ad B D, ita K H ad G [c]. Major autem est C B quam B D. Ergo et K H quam G est major. Ponatur ipsi G æqualis K E: commensurabilis igitur est K E ipsi B C longitudine. Et quoniam est ut C B ad B D, ita H K ad K E; erit, per conversionem rationis, ut B C ad C D, ita K H ad H E. Fiat ut K H ad H E, ita H F ad F E; et reliqua igitur K F ad F H est ut K H ad H E, hoc est, ut B C ad C D [d]. Sed B C, C D potentiâ solum sunt commensurabiles. Ergo et K F, F H potentiâ solum commensurabiles erunt. Et cum sit ut K H ad H E, ita K F ad F H; ut autem K H ad H E, ita H F ad F E; erit et ut K F ad F H

[b] 21. hujus. [c] 16. sexti. [d] 19. quinti.




F H, ita H F ad F E. Quare ut prima ad tertiam, ita quadratum ex primâ ad quadratum ex secundâ [e]: ut igitur K F ad F E, ita quadratum ex K F ad id quod fit ex F H quadratum. Commensurabile autem est quadratum ex K F quadrato ex F H; sunt enim K F, F H potentiâ commensurabiles. Ergo et K F ipsi F E commensurabilis est longitudine: ac propterea F K ipsi K E longitudine commensurabilis [f]. Sed K E rationalis est, et ipsi B C longitudine commensurabilis. Ergo et K F rationalis erit, et ipsi B C commensurabilis longitudine. Et quoniam est ut B C ad C D, ita K F ad F H; erit permutando ut B C ad K F, ita D C ad F H. Commensurabilis autem est B C ipsi K F. Quare et C D ipsi F H est commensurabilis [g]. Suntque B C, C D rationales potentiâ solum commensurabiles. Ergo et K F, F H rationales erunt, potentiâ solum commensurabiles: ex binis igitur nominibus est K H [h]. Et si quidem B C plus potest quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Et si B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D est commensurabilis longitudine expositæ rationali, erit et ipsa F H eidem commensurabilis. Et si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. At si B C plus poterit quam C D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, et K F plus poterit quam F H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et si quidem B C longitudine commensurabilis est expositæ rationali, et K F eidem commensurabilis erit. Si vero C D, et ipsa F H. Quod si neutra ipsarum B C, C D, et neutra ipsarum K F, F H. Ex binis igitur nominibus est K H, cujus nomina K F, F H commensurabilia sunt nominibus apotomæ B C, C D, et in eâdem ratione; et K H eundem tenet ordinem, quem ipsa B C [i]. *Q. E. D.*

[e] Cor. 2. 20. sexti.
[f] 16. hujus.
[g] 10. hujus.
[h] 37. hujus.
[i] Deff. Secund. et Tert. hujus.

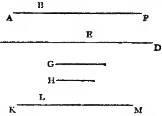
PROP.

## PROP. CXV. THEOR. [CXV.]

*Si spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea, spatium potens, est rationalis.*

Spatium enim contineatur sub A B, C D; videlicet sub apotomâ A B, et quæ sit ex binis nominibus C D, cujus majus nomen C E; et sint nomina ejus, quæ ex binis nominibus, C E, E D, commensurabilia nominibus apotomæ A F, F B, et in eâdem ratione; sitque recta linea G, potens spatium contentum sub A B, C D: dico ipsam G rationalem esse.

Exponatur enim rationalis H, et quadrato ex H æquale ad ipsam C D applicetur, latitudinem faciens K L [k]; [k] 45. primi.



apotome igitur est K L, cujus nomina K M, M L commensurabilia sunt nominibus ejus, quæ est ex binis nominibus, sc. C E, E D, et in eadem ratione [l]. Sed C E, [l] 113. hujus. E D commensurabiles sunt ipsis A F, F B, atque in eâdem ratione [m]. Est igitur ut A F ad F B, ita K M ad M L [n]; et [m] ex hyp. permutando ut A F ad K M, ita F B ad M L. Quare et [n] 11. quinti. reliqua A B ad reliquam K L est ut A F ad K M [o]. Com- [o] 19. quinti. mensurabilis autem est A F ipsi K M: ergo et A B ipsi K L est commensurabilis [p]. Estque ut A B ad K L, ita [p] 10. hujus. rectangulum contentum sub C D, A B ad id, quod continetur sub C D, K L [q]: commensurabile igitur est re- [q] 1. sexti. ctangulum contentum sub C D, A B rectangulo, quod sub C D, K L continetur. Sed rectangulum contentum sub C D, K L est æquale quadrato ex H [r]: ergo rectan- [r] Per construct. gulum, quod continetur sub C D, A B, quadrato ex H est commensurabile. Rectangulum autem, quod continetur sub C D, A B, est æquale quadrato ex G [m]. Ergo quadratum

dratum ex G commensurabile est quadrato ex H. Atqui est quadratum ex H rationale: rationale igitur est quadratum ex G; et idcirco ipsa G, quæ potest quod sub C D, A B continetur, est rationalis.

Si igitur spatium contineatur sub apotomâ et eâ, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, et in eâdem ratione; recta linea spatium potens est rationalis. *Q. E. D.*

*Cor.* Ex iis manifesto constat fieri posse, ut spatium rationale sub irrationalibus rectis lineis contineatur.

[CXVI.] PROP. CXVI. THEOR.

*A mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.*

Sit media A: dico ex ipsâ A infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem esse.

Exponatur rationalis B, et rectangulo, contento sub A, B, æquale sit quadratum ex C. Irrationalis igitur est ipsa C[a]: nam quod sub irrationali et rationali continetur irrationale est. Et est eadem nulli earum, quæ prius[c]; non enim quadratum alicujus antecedentium, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam (per 61, 62, 63, 64, 65, 66, et 98, 99, 100, 101, 102, 103. hujus.) Rursus, rectangulo, quod sub B, C continetur, æquale sit quadratum ex D: irrationale igitur est quod fit ex D; et idcirco ipsa D est irrationalis, et nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum, quæ prius sunt, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipsam C. Similiter et eodem ordine infinite protracto, manifestum est a mediâ infinitas irrationales fieri, et nullam alicui antecedentium eandem esse. *Q. E. D.*




a Def. 11. hujus.

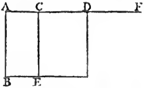
c In hoc lib.

† Aliter. Sit media A C: dico ex ipsâ A C infinitas irrationales fieri, et nullam alicui priorum eandem esse.

† *Demonstratio hæc, quæ pro aliâ habetur tam in Codd. MSS. quam in editis, parum differt a præcedente. Illam tamen cum Commandino retinuimus.*

Ducatur

Ducatur ipsi A C ad rectos angulos A B, sitque A B rationalis, et B C compleatur: irrationale igitur est B C, et ipsum potens est irrationalis. Possit autem ipsum recta linea C D; ergo C D irrationalis est, et nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit mediam. Rursus, compleatur E D, erit E D irrationale; et recta linea ipsum potens irrationalis. Possit ipsum recta linea D F: ergo D F irrationalis est, et nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum, ad rationalem applicatum, latitudinem efficit ipsam C D.

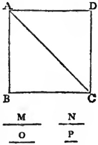



Ergo a mediâ infinitæ irrationales fiunt, et nulla alicui priorum est eadem.

## * PROP. CXVII. THEOR. [CXVII.]

*Quadrati cujusque diagonalis lateri ejusdem longitudine est incommensurabilis.*

Quadrati A B C D, cujus latus A B, diagonalis sit A C. Dico A C ipsi A B longitudine incommensurabilem. Non enim. Commensurabilis igitur est A C ipsi A B longitudine. A C igitur ad A B rationem habet, quam numerus ad numerum [u]. Habeat, quam numerus M ad numerum N. Numerus autem M, seipsum multiplicans, faciat quadratum O. Numerus item N, seipsum multiplicans, faciat quadratum P. Jam cum recta A C ad rectam A B rationem habet, quam numerus M ad numerum N; quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam numerus quadratus O ad numerum quadratum P [x]. Sed propter [x] triangulum isosceles A B C, ad B rectangulum, quadratum ex A C ad quadratum ex A B rationem habet, quam binarius ad unitatem [y]. Numerus igitur quadratus O ad [y] numerum quadratum P rationem habet, quam binarius ad unitatem [z]. Numeris autem O, P quadratis unus [z] intercedit proportione medius [a]. Quare binario etiam [a] et




[u] 5. hujus.
[x] 9. hujus.
[y] 47. primi.
[z] 11. quinti.
[a] 11. octavi.

[a] 8. octavi. et unitati unus intercedet proportione medius[a]; binario utique minor, major idem unitate. Quod eſt abſurdum. Cum binarius et unitas ipſâ tantum unitate differant. Non eſt igitur A C ipſi A B longitudine commenſurabilis. Incommenſurabilis igitur longitudine. Quadrati igitur cujuſque &c. *Q. E. D.*

Aliter (e Clavio.) Quoniam quadratum ex diagonali
[b] 47. primi. duplum eſt quadrati ex latere[b], habebit quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere rationem binarii ad unitatem, vel quaternarii ad binarium, vel octonarii ad quaternarium, &c. Et quia ſumptis in proportione duplâ quotcunque numeris ab unitate, 1, 2. 4. 8. 16. 32, &c. ſolum tertius ab unitate quadratus eſt, et cæ-
[c] 10. noni. teri omnes unum intermittentes[c], (quia primus ad unitate, nempe 2, quadratus non ſit) erunt ſolum hi numeri, 4. 16. 64, &c. quadrati, reliqui vero, 2. 8. 32, non quadrati. Quare cum quaternarius quadratus ſit et binarius non quadratus, non habebit quaternarius ad binarium proportionem, quam quadratus aliquis nume-
[d] 24. octavi. rus ad quadratum[d]. Ac propterea neque quadratum ex diagonali ad quadratum ex latere proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt diagonalis longitudine ipſi
[e] 9. hujus. lateri[e]. *Q. E. D.*

* SCHOLION (e Clavio.)

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cujus intelligentia ex ſequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti poſſet. Verum quia in eâ continetur doctrina non contemnenda, ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, et incommenſurabilitatem, pertinens; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt.

Eſt igitur appendix hæc. Inventis lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, invenientur et aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, C, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter



ter quas media proportionalis fit B. Quoniam igitur ut A ad C, ita eſt figura rectilinea quævis ſuper A conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper B [f]; et ſunt A et C longitudine incommenſurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A et B incommenſurabiles [g]. Rurſus, quoniam circuli, quorum diametri A, B proportionem habent, quam quadrata ex A, B deſcripta: quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, C [f]: habebunt quoque circuli diametrorum A, B eandem proportionem, quam rectæ A, C [h]. Sed rectæ A, C incommenſurabiles ſunt longitudine. Igitur et circuli diametrorum A, B incommenſurabiles ſunt [g]. Jam vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata ejuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, B, habebunt pyramides atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ (5, 6, vel 7. duod.) Quare cum rectilineæ figuræ illæ incommenſurabiles ſint, ut modo eſt demonſtratum; incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, et priſmata [g]. Quod ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, B; habebunt hujuſmodi coni et cylindri eandem proportionalem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis [l]. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, et cylindri [g]. Inventæ ſunt igitur non ſolum lineæ et ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam et corpora, ſive ſolida, incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

[f] Cor. 2. 20. ſexti.
[g] 10. hujus.
[h] 11. quinti.
[l] 11. duod.

Eadem autem ratione, ſi rectæ A et B longitudine commenſurabiles ſint, oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon et ipſarum circulos commenſurabiles eſſe [g]; atque adeo et earundem pyramides et priſmata; ac denique conos, et cylindros, ſi modo eandem habeant altitudinem; ut perſpicuum eſt (5, 6, 7, & 11. duod.)

# EUCLIDIS

## ELEMENTORUM

## LIBER UNDECIMUS.

### DEFINITIONES.

Definitio I. [I.]

SOLIDUM eſt, quod longitudinem, latitudinem, et craſſitudinem habet.

II. [II.]

Solidi terminus eſt ſuperficies.

III. [III.]

Recta linea ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV. [IV.]

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

V. [V.]

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque a puncto, quod perpendicularis in ipſo plano effecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta;

juncta; est, inquam, angulus acutus insistente lineâ et adjunctâ comprehensus.

[VI.] VI.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus, rectis lineis contentus, quæ, in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

[VII.] VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

* VIII.

Linea recta plano dicitur parallela, quæ infinite producta infinite producto nusquam occurrit.

[VIII.] * IX.

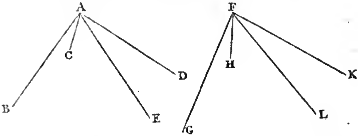
Parallela sunt plana, quæ infinite producta nusquam conveniunt.

[XI.] * X.

Solidus est angulus plurium quam duarum linearum, quæ se mutuo contingunt, nec in eâdem sunt superficie, mutua inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quam duobus angulis planis, in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

*Cor.* * Anguli solidi, qui planis angulis æqualibus continentur, quorum æqualium plana, singula singulis, similiter sunt inclinata, inter se æquales sunt.

Sint anguli solidi ad A et F. Quorum ille ad A angulis planis contineatur BAC, CAD, DAE, EAB. Alter autem ad F angulis planis GFH, HFK, KFL,




LFG.

L F G; qui prioribus, angulum A constituentibus, B A C, C A D, D A E, E A B singuli singulis sint æquales. Plana etiam B A C, C A D, D A E, E A B similiter inter se, atque inter se altera G F H, H F K, K F L, L F G, sint inclinata. Dico angulum solidum ad A solido ad F æqualem.

Admoveatur enim punctum A puncto F. Rectaque A B rectæ F G applicetur. Planum item A B C plano G F H superimponatur. Ita, propter angulum B A C angulo G F H æqualem, recta A C rectæ F H se applicabit. Jam vero plano B A C alteri G F H applicato, cum planis illis, B A C, G F H, altera illa, D A C, K F H, similiter sunt inclinata; omnino planum C A D plano H F K se applicabit. Rectis A C, F H congruentibus, id enim ostensum; propter angulum C A D angulo H F K æqualem, recta A D rectæ F K se applicabit. Rursum plano C A D alteri H F K applicato, cum planis illis, C A D, H F K, altera, D A E, K F L, similiter sint inclinata, planum D A E plano K F L se applicabit. Rectisque D A, F K congruentibus, id enim ostensum; propter angulum D A E angulo K F L æqualem, recta A E rectæ F L se applicabit. Rectæ igitur A B, A C, A D, A E rectis F G, F H, F K, F L, singulæ singulis, se applicuerint. Quapropter angulus solidus ad A solido ad F congruit, et cui congruit æqualis est. *Q. E. D.*

### * Definitio XI. [IX.]

Similes sunt figuræ solidæ, quæ planis similibus continentur, multitudine æqualibus, et similiter inter se inclinatis: eâ nempe lege, ut similes sint, planorum in diversis figuris similium, inclinationes.

*Cor.* * Similes figuræ solidæ, quarum similia latera plana sunt etiam æqualia, inter se æquales sunt.

Nam si planum unius plano simili et æquali alterius superimponatur, sic ut latera planorum homologa et æqualia congruant, reliqua plana unius similibus et æqualibus alterius, singula singulis, congruent, et anguli solidi unius solidis alterius angulis, singuli quoque singulis, congruent. Quod facile quivis intelliget, qui demonstrationem Corollarii decimæ diligenter meditatus fuerit. Inde autem efficietur, figuras ipsas perfecte congruere.

XII.

[XII.] XII.

Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituuntur.

[XIII.] XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt et æqualia, et ſimilia, et parallela; alia vero parallelogramma.

[XIV.] XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus revolvitur unde moveri cœperat.

[XV.] XV.

Axis autem ſphæræ eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

[XVI.] XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod et ſemicirculi.

[XVII.] XVII.

Diameter autem ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ducta, et utrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

[XVIII.] XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat. Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: ſi vero minor, amblygonius: ſi vero major, oxygonius.

[XIX.] XIX.

Axis autem coni eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

[XX.] XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui a circumductâ rectâ lineâ deſcribitur.

[XXI.] XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſeipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri.

XXII.

XXII. [XXII.]

Axis autem cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII. [XXIII.]

Baſes vero cylindri ſunt circuli a duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

XXIV. [XXIV.]

Similes coni et cylindri ſunt, quorum et axes, et baſium diametri proportionales ſunt.

XXV. [XXV.]

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI. [XXVI.]

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVII. [XXVII.]

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

XXVIII. [XXVIII.]

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus et æquilateris et æquiangulis contenta.

XXIX. [XXIX.]

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus et æquilateris contenta.

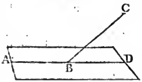
XXX. [XXX.]

Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverſo parallelæ ſunt, contenta.

## PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

*Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.*

Si enim fieri poteſt, rectæ lineæ A B pars quidem A B ſit in ſubjecto plano, pars vero B C in ſublimi. Erit recta linea quædam ipſi A B in directum continuata in ſubjecto plano. Sit D B. Duabus igitur datis rectis lineis A B C, A B D commune



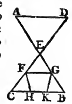

ſegmentum

ſegmentum eſt A B; quod fieri non poteſt †. Non igitur rectæ lineæ pars quædam eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. *Q. E. D.*

## [II.] PROP. II. THEOR.

*Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit.*

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D ſe invicem in puncto E ſecent. Dico ipſas A B, C D in uno eſſe plano, et omne triangulum in uno plano conſiſtere. Sumantur enim in ipſis E B, E C quævis puncta B, C, et jungatur B C. Dico primum triangulum E B C conſiſtere in uno plano. Sumantur enim in ipſis E B, E C puncta quævis alia G, F; et in rectâ C B puncta quævis H, K; et F G, F H, G K jungantur. Si trianguli E B C pars quædam F H C, vel G B K, in ſubjecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit et lineæ E B, vel E C, pars in ſubjecto plano, et pars in alio. Quod ſi trianguli E C B pars F C B G, ſit in ſubjecto plano, reliqua vero in alio; utrarumque rectarum linearum E C, E B quædam pars erit in ſubjecto plano, quædam vero in alio. Quod abſurdum eſſe oſtendimus [a]. Triangulum igitur E B C in uno eſt plano. In quo autem plano eſt B C E triangulum, in hoc eſt utraque ipſarum E C, E B: in quo autem utraque ipſarum E C, E B, in hoc et A B, C D. Ergo rectæ lineæ A B, C D in uno ſunt plano; et omne triangulum in uno plano conſiſtit. *Q. E. D.*

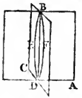



[a] 1. hujus.

## [III.] PROP. III. THEOR.

*Si duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit.*

Duo plana A B, B C ſe invicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit D B linea. Dico lineam D B rectam eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur a puncto D ad B, in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C, recta linea D F B. Erunt utique duarum rectarum linearum D E B, D F B iidem termini, et ipſæ ſpatium continebunt; quod eſt abſurdum.

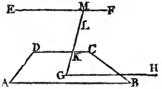



† *Cum naturæ Recti (τοῦ εὐθέος) in lineis aperte contrarium eſſet.*

ſurdum [b]. Si igitur duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit. *Q. E. D.* [b] Ax. 10.

*Cor.* 1. * Si linea recta ſubjecto plano ſit parallela, et per punctum quodlibet eorum, quæ in plano, ducatur recta priori parallela, hæc in ſubjecto plano tota erit.

Puta rectam E F, plano ſubjecto A B C D parallelam. In plano A B C D ſumatur utcunque punctum G; et per G ducatur G H, rectæ E F parallela. Dico rectam G H in plano A B C D totam eſſe. Non enim. Planum igitur parallelarum, E F, G H, planum A B C D (cui parallelum eſſe nequit, cum punctum G utrique ſit commune) ſecabit: et communis interſectio linea recta erit. Sit K L. Tres igitur rectæ E F, G H, K L ſunt in uno eodemque plano. Punctum autem G, cum ſit planis A B C D, E F G H commune, erit ad communem ipſorum interſectionem. Hoc eſt, ad rectam K L. Recta igitur K L rectæ G H in ipſo puncto G occurrit; et rectæ E F, cui parallela eſt G H, nequit eſſe parallela, cum tamen ſit in eodem plano. Occurret igitur K L rectæ E F. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum ſit ad communem planorum E F G H, A B C D interſectionem K L, omnino erit in plano A B C D. Eſt autem ad rectam E F. Punctum igitur M plano A B C D et rectæ E F eſt commune. Recta igitur E F plano ſubjecto A B C D in puncto M occurrit. Plano igitur A B C D recta E F non eſt parallela [c]. Quod hypotheſi contrarium eſt. Recta igitur G H in plano A B C D. *Q. E. D.* [c] Def. 8. hujus.



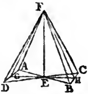

*Cor.* 2. * Si rectæ E F in plano ſubjecto A B C D duci poſſit parallela G H; recta E F plano A B C D parallela erit. Non enim. Occurret igitur plano. Occurrat in M. Punctum igitur M, cum ſit ad rectam E F, erit in plano parallelarum E F, G H. Eſt autem in plano A B C D [d]; ad communem igitur planorum A B C D, F E G H interſectionem, quæ eſt ipſa recta G H. Parallelæ igitur rectæ E F, G H in puncto M conveniunt. Quod eſt abſurdum. Recta igitur E F plano A B C D nullibi occurrit. Recta igitur E F parallela eſt plano [c]. *Q. E. D.* [d] ex hyp.

[IV.] 

## PROP. IV. THEOR.

*Si recta linea duabus rectis lineis, se invicem secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.*

Recta linea quædam E F duabus rectis lineis A B, C D, se invicem secantibus in E puncto, in ipso E ad rectos angulos insistat. Dico E F etiam plano per A B, C D ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ E A, E B, C E, D E inter se æquales: perque E ducatur recta linea G E H utcunque; et jungantur A D, C B; deinde a quovis puncto F ducantur



F A, F G, F D, F C, F H, F B. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E, E D duabus rectis lineis B E, E C æquales sunt, et angulos æquales A E D, C E B continent [e]; erit A D basis basi C B æqualis, et triangulum A E D triangulo C E B æquale [f]. Ergo et angulus D A E æqualis est angulo E B C. Est autem et angulus A E G æqualis angulo B E H [e]. Duo igitur triangula sunt A G E, B E H, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, et unum latus A E uni lateri E B æquale, quod est ad æquales angulos. Quare et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt [g]. Ergo G E quidem est æqualis ipsi E H; A G vero ipsi B H. Quod cum A E sit æqualis E B, communis autem et ad rectos angulos F E; erit basis A F basi F B æqualis [f]. Eâdem quoque ratione, et C F æqualis erit F D. Præterea quoniam A D est æqualis C B, et A F ipsi F B, erunt duæ F A, A D duabus F B, B C æquales, altera alteri; et ostensa est basis D F æqualis basi F C. Angulus igitur F A D angulo F B C est æqualis [h]. Rursus ostensa est A G æqualis B H; sed et A F ipsi F B æqualis. Duæ igitur F A, A G duabus F B, B H æquales sunt, et angulus F A G æqualis est angulo F B H, ut demonstratum fuit; basis igitur G F basi F H est æqualis [f]. Rursus quoniam G E ostensa est æqualis E H, communis autem E F; erunt duæ G E, E F æquales duabus H E, E F; et basis H F est æqualis basi F G. Angulus igitur G E F, angulo H E F est æqualis [h]; et idcirco rectus est uterque angulorum G E F, H E F. Ergo F E ad G H, utcunque per E ductam, rectos efficit angulos. Similiter ostendemus F E etiam ad omnes rectas

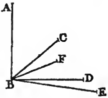
[e] 15. primi.
[f] 4. primi.
[g] 26. primi.
[h] 8. primi.

rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. Recta autem ad planum recta eſt, quando ad omnes rectas lineas, ipſam contingentes, et eodem exiſtentes plano, rectos efficit angulos[i]. Quare F E ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. [i] Def. 3. hujus. At ſubjectum planum eſt, quod per A B, C D rectas lineas ducitur. Ergo F E ad rectos angulos erit ducto per A B, C D plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis, ſe invicem ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*

## PROP. V. THEOR. [V.]

*Si recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.*

Recta linea quædam A B tribus rectis lineis B C, B D, B E, in contactu B, ad rectos angulos inſiſtat. Dico B C, B D, B E in uno plano eſſe. Non enim. Sed ſi fieri poteſt, ſint B D, B E quidem in ſubjecto plano; B C vero in ſublimi: et planum per A B, B C producatur. Communem utique ſectionem in ſubjecto plano faciet rectam lineam[k]; faciat B F. In



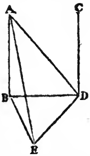

[k] 3. hujus.

uno igitur ſunt plano, per A B, B C ducto, tres rectæ lineæ A B, B C, B F. Et quoniam A B utrique ipſarum B D, B E ad rectos angulos inſiſtit, et ducto per ipſas D B, B E plano ad rectos angulos erit. Planum autem per D B, B E eſt ſubjectum planum. Ergo A B ad ſubjectum planum recta eſt[l]. Quare et ad omnes rectas [l] 4. hujus. lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos[m]; ſed ipſam tangit B F in ſubjecto exiſtens plano. Ergo angulus A B F rectus eſt. [m] Def. 3. hujus. Ponitur autem et A B C angulus rectus. Æqualis igitur eſt angulus A B F angulo A B C. Et in eodem ſunt plano; quod fieri non poteſt. Recta igitur linea B C non eſt in ſublimi. Quare tres rectæ lineæ B C, B D, B E in uno ſunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis, ſeſe tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. *Q. E. D.*

[VI.] PROP. VI. THEOR.

*Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.*

Duæ enim rectæ lineæ A B, C D subjecto plano sint ad rectos angulos. Dico A B ipsi C D parallelam esse. Occurrant enim subjecto plano in punctis B, D; jungaturque B D recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur D E; et positâ D E ipsi A B æquali, jungantur B E, A E, A D. Quoniam igitur A B recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt et in subjecto sunt plano,




[n Def. 3. hujus.] rectos angulos efficiet [n]. Contingit autem A B utraque ipsarum B D, B E, existens in subjecto plano. Ergo uterque angulorum A B D, A B E rectus est. Eâdem ratione rectus etiam est uterque ipsorum C D B, C D E. Et quoniam A B æqualis est ipsi D E, communis autem B D; erunt duæ A B, B D duabus E D, D B æquales; et rectos angulos continent; basis igitur A D basi B E

[o 4. primi.] est æqualis [o]. Rursus quoniam A B est æqualis D E, et A D ipsi B E; duæ A B, B E duabus E D, D A æquales sunt, et basis ipsarum A E communis; ergo angulus

[p 8. primi.] A B E angulo E D A est æqualis [p]. Sed A B E rectus est. Rectus igitur et E D A; et idcirco E D ad D A est perpendicularis. Sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum B D, D C. Quare E D tribus rectis lineis B D, D A, D C in contactu ad rectos insistit angulos. Tres

[q 5. hujus.] igitur rectæ lineæ B D, D A, C D in uno sunt plano [q]. In quo autem sunt B D, D A, in eo est A B, omne enim

[r 2. hujus.] triangulum in uno est plano [r]. Ergo A B, B D, D C in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum

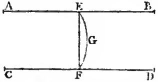
[s 28. primi.] A B D, B D C rectus. Parallela igitur est A B ipsi C D [s]. Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utrâque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta, in eodem erit plano, in quo et parallelæ.*

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D; et in utrâque ipsarum sumantur quælibet puncta E, F. Dico rectam lineam, quæ puncta E, F conjungit, in eodem plano esse,




in quo sunt parallelæ. Non enim; sed si fieri potest, sit in sublimi, ut E G F; et per E G F planum ducatur, quod in subjecto plano sectionem faciet rectam lineam [t]; faciat ut E F. Ergo duæ rectæ lineæ E G F, E F spatium continebunt; quod fieri non potest [u]. Non igitur quæ a puncto E ad F ducitur recta linea, in sublimi est plano; quare erit in eo, quod per A B, C D parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. *Q. E. D.*

[t] 3. hujus.

[u] Ax. 10. primi.

## PROP. VIII. THEOR. [VIII.]

*Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.*

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B, C D, et altera ipsarum A B subjecto plano sit ad rectos angulos. Dico et reliquam C D eidem plano ad rectos angulos esse. Occurrant enim A B, C D subjecto plano in punctis B, D; et B D jungatur. Ergo A B, C D, B D in uno sunt plano [x]. Ducatur ipsi B D ad rectos angulos in subjecto plano D E; et ponatur D E ipsi A B æqualis: junganturque B E, A E, A D. Et quoniam A B perpendicularis est ad subjectum planum; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntque in subjecto plano, perpendicularis erit [y]. Rectus igitur est uterque angulorum A B D, A B E. Quod cum in parallelas rectas lineas A B, C D recta incidit B D, erunt anguli A B D, C D B duobus rectis æquales [z]. Rectus autem est A B D. Ergo et C D B est rectus; ac propterea C D perpendicularis est ad B D. Et quoniam A B est æqualis D E, communis autem B D; duæ

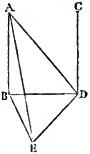
Vide fig. Prop. 6.

[x] 7. hujus.

[y] Def. 3. hujus.

[z] 29. primi.

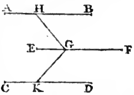
duæ A B, B D duabus E D, D B æquales ſunt; et angulus A B D eſt æqualis angulo E D B, rectus enim uterque eſt; baſis igitur
a 4. primi. A D baſi B E eſt æqualis [a]. Rurſus quoniam A B æqualis eſt D E, et B E ipſi A D; erunt duæ A B, B E duabus E D, D A æquales, altera alteri; et baſis earum communis A E. Quare angulus
b 8. primi. A B E eſt æqualis angulo E D A [b]. Rectus autem eſt A B E. Ergo et E D A eſt rectus, et E D ad D A perpendicularis. Sed et perpendicularis eſt ad B D. Ergo E D etiam ad planum per
c 4. hujus. B D, D A perpendicularis erit [c]; et ad omnes rectas lineas, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam
d Def. 3. hujus. contingunt, rectos faciet angulos [d]. At in plano per B D, D A eſt D C, quoniam tam B D, quam B A eſt in plano parallelarum B A, D C. Quare E D ipſi D C eſt ad rectos angulos: ideoque C D ad rectos angulos eſt ipſi D E; ſed et etiam ipſi D B. Ergo C D duabus rectis lineis D E, D B ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per D E, D B eſt ad rectos angulos [e]. Planum autem per D E, D B eſt ſubjectum planum. Ergo C D ſubjecto plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*




[IX.] PROP. IX. THEOR.

*Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano; etiam inter ſe parallelæ erunt.*

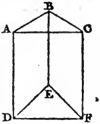
Sit utraque ipſarum A B, C D parallela ipſi E F, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano. Dico A B ipſi C D parallelam eſſe. Sumatur in E F quodvis punctum G, a quo ipſi E F, in plano quidem per E F, A B tranſeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem tranſeunte per E F, C D, rurſus ducatur ipſi E F ad rectos angulos G K. Et quoniam E F ad utramque ipſarum G H, G K eſt perpendicularis, erit E F etiam ad rectos angulos plano
e 4. hujus. per G H, G K tranſeunti [e]. Atque eſt E F ipſi A B parallela. Ergo et A B plano per H G K ad rectos angulos
f 8. hujus. eſt [f]. Eâdem ratione et C D plano per H G K eſt ad rectos



rectos angulos. Utraque igitur ipsarum A B, C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint; parallelæ erunt inter se[g]. Ergo A B ipsi C D est parallela. *Q. E. D.* g 6. hujus.

## PROP. X. THEOR. [X.]

*Si duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.*



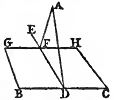

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B, B C, duabus rectis lineis D E, E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum A B C, angulo D E F æqualem esse. Assumantur enim B A, B C, E D, E F inter se æquales; et jungantur A D, C F, B E, A C, D F. Quoniam igitur B A ipsi E D æqualis est, et parallela; erit et A D æqualis, et parallela ipsi B E[h]. Eâdem h 33. primi. ratione et C F ipsi B E æqualis, et parallela erit. Utraque igitur ipsarum A D, C F ipsi B E æqualis est, et parallela. Quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano, et inter se parallelæ erunt[i]. Ergo A D i 9. hujus. parallela est ipsi C F, et æqualis. Atque ipsas conjungunt A C, D F; et A C igitur ipsi D F æqualis est, et parallela[h]. Et quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus D E, E F æquales sunt, et basis A C est æqualis basi D F; erit angulus A B C angulo D E F æqualis[k]. Si k 8. primi. igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. *Q. E. D.*

## PROP. XI. PROBL. [XI.]

*A dato puncto in sublimi ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.*

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum B H. Oportet a puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque B C; et a puncto A ad B C perpendicularis agatur A D[l]. Siquidem igitur A D perpendicularis sit l 33. primi. etiam ad subjectum planum, factum jam erit, quod propone-

proponebatur. Sin minus; ducatur a puncto D ipsi B C in subjecto plano ad rectos angulos
m 11. primi. D E [m]; et a puncto A ad D E per-
n 12. primi. pendicularis ducatur A F [n]. Dico A F subjecto plano B H perpendicularem esse. Ducatur enim per F ipsi B C parallela G H. Quoniam B C utrique ipsarum D A, D E est ad
o 4. hujus. rectos angulos; erit et B C ad rectos angulos plano per E D, D A transeunti [o]. Quin ipsi B C parallela est G H. Si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano
p 8. hujus. alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit [p]. Quare et G H plano per E D, D A transeunti ad rectos angulos est: ac propterea
q Def. 3. hujus. ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis [q]. Contingit autem ipsam A F existens in plano per E D, D A. Ergo G H perpendicularis est ad A F. Et ob id A F est perpendicularis ad G H. Est autem A F ad D E perpendicularis. Ergo A F perpendicularis est ad utramque ipsarum H G, D E. Si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit [o]. Quare A F plano per E D, G H ducto est ad rectos angulos. Planum autem per E D, G H est subjectum planum B H. Ergo A F ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est A F. *Q. E. F.*



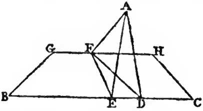

*Cor.* 1.* Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C H G recta A F ad perpendiculum deducta sit; et a puncto F, ubi recta deducta incidit plano, ad rectam quamlibet in plano B C ad perpendiculum ducatur F D, rectæ illi B C in D occurrens; juncta A D eidem rectæ B C ad perpendiculum erit.

Ducatur enim in plano B C H G recta G H ipsi B C pa-
r 29. primi. rallela. Recta igitur F D, quæ ad perpendiculum est rectæ B C, rectæ etiam G H ad perpendiculum erit [r]. Eadem autem G F ad perpendiculum rectæ A F [s]. Recta igitur G F, quæ duabus rectis D F, F A in puncto F occurrentibus ad perpendiculum est, plano trianguli A F D ad

ad perpendiculum erit [s]. Recta autem B D rectæ G F [t] parallela. Quare B D eidem plano A F D ad perpendiculum erit [t]. Angulus igitur B D A rectus [u]. *Q. E. D.* [s] 4. hujus. [t] 8. hujus. [u] Def. 3. hujus.

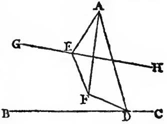
*Cor.* 2. * Si a puncto in sublimi A in planum subjectum B C G H recta A F ad perpendiculum deducatur, et si in rectam quamlibet in eodem plano B C alia ad perpendiculum deducatur A D; juncta D F eidem B C ad perpendiculum erit.

Non enim. A puncto igitur F in rectam B C ad perpendiculum deducatur F E. Juncta A E rectæ B C ad




perpendiculum erit [x]. Trianguli igitur A E D anguli duo A D E, A E D duobus rectis sunt æquales. Quod est absurdum. [x] Cor. 1.*

*Cor.* 3. * Si a puncto in sublimi A in rectas duas B C, G H in subjecto plano, quæ non sunt inter se parallelæ, rectæ A D, A E ad perpendiculum deducantur; et a punctis D, E eisdem rectis B C, G H ad perpendiculum educantur in subjecto plano D F, E F, quæ sibi mutuo in F occurrant; recta A F, quæ jungit



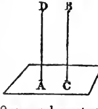

punctum mutui occursûs F, et punctum in sublimi A, ad perpendiculum erit subjecto plano. Nam recta, a puncto A in subjectum planum B C H G ad perpendiculum deducta, occurret plano in puncto aliquo rectæ D F [y]. Et ob eandem rationem in puncto aliquo rectæ E F. In puncto igitur F, duarum D F, E F communi. *Q. E. D.* [y] Per constract. Probl.

PROP.

[XII.] PROP. XII. PROBL.

*Dato plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.*

Sit datum quidem planum subjectum; punctum autem, quod in ipso sit, A. Oportet a puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, a quo ad subjectum planum agatur perpendicularis B C [x]; et per A ipsi B C parallela ducatur A D [y]. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D, C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; et reliqua A D subjecto plano ad rectos angulos erit [z]. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. *Q. E. F.*

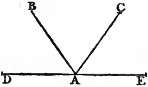



[x] 11. hujus.
[y] 31. primi.
[z] 8. hujus.

[XIII.] PROP. XIII. THEOR.

*Dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eâdem parte.*

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B, A C ad rectos angulos constituantur ex eâdem parte; et ducatur planum per B A, A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam [a]. Faciat D A E. Ergo rectæ lineæ A B, A C, D A E in uno sunt plano. Et quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est; et ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos [b]. Contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. Angulus igitur C A E rectus est. Eâdem ratione et rectus est B A E. Ergo angulus C A B ipsi B A E est æqualis. Et in uno sunt plano; quod fieri non potest. Non igitur dato plano, a puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eâdem parte. *Q. E. D.*



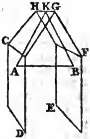

[a] 3. hujus.
[b] Def. 3. hujus.

PROP.

## PROP. XIV. THEOR. [XIV.]

*Ad quæ plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.*

Recta quædam linea A B ad utrumque ipſorum planorum C D, E F ſit perpendicularis. Dico ea plana parallela eſſe. Si enim non ita ſit, producta convenient inter ſe: conveniant, et communem ſectionem faciant rectam lineam G H; et in ipſa G H ſumpto quovis puncto K, jungatur A K, B K. Quoniam igitur A B perpendicularis eſt ad E F planum; erit et perpendicularis ad ipſam B K rectam lineam in plano E F producto exiſtentem. Quare angulus A B K rectus eſt. Eâdem ratione et B A K




eſt rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K, B A K duobus rectis ſunt æquales; quod fieri non poteſt[c]. [c] 17. primi.
Non igitur plana C D, E F producta inter ſe convenient. Quare C D, E F parallela ſint neceſſe eſt. Ad quæ igitur plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. *Q. E. D.*

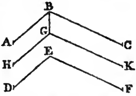
*Cor.* * Et e converſo, ſi ſint duo plana parallela, quæ alteri ipſorum ad perpendiculum eſt linea recta, ea alteri etiam ad perpendiculum erit. Plano enim D C ad perpendiculum ſit recta B A. Dico plano alteri E F, priori parallelo, eandem A B ad perpendiculum eſſe. Non enim. Duci igitur poterit in plano E F recta, quæ angulum cum A B obliquum faciat[d]. Ducatur B K. Dua- [d] Def. 3.
rum autem A B, B K planum ſecabit planum B C in hujus.
lineâ rectâ[e]. Secet in A K. Angulus igitur B A K rectus [e] 3. hujus.
eſt[d]. Angulus autem A B K obliquus[f]. Duo igitur [f] Per con-
B A K, A B K duobus rectis non ſunt æquales. Rectæ ſtruct.
igitur A K, B K, cum in eodem ſint plano, in puncto aliquo convenient[g]. Concurſus ſit punctum K. Jam [g] Ax. 12.
cum omne punctum in rectâ A K ſit in plano D C, et primi.
omne punctum in rectâ B K in plano E F; punctum K, quod in utrâque eſt rectâ, planis duobus D C, E F commune erit. Plana igitur D C, E F non ſunt inter ſe parallela. Quod hypotheſi contrarium eſt. Si ſint igitur duo plana parallela &c. *Q. E. D.*

PROP.

[XV.] PROP. XV. THEOR.

*Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.*

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B, B C duabus rectis lineis sese tangentibus D E, E F parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico plana, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur a puncto B ad planum, quod per D E, E F transit, perpendicularis B G, quæ plano in




puncto G occurrat; et per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. Itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E, E F; et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, et in eodem sunt plano, rectos faciet angulos [d]. Contingit autem ipsam utraque earum G H, G K, quæ sunt in eodem plano. Rectus igitur est uterque angulorum B G H, B G K. Et quoniam B A parallela est ipsi G H, (nimirum cum utraque earum ipsi D E parallela sit) anguli G B A, B G H duobus rectis sunt æquales [e]. Rectus autem est B G H. Ergo et G B A rectus erit, ideoque G B ad B A est perpendicularis. Eâdem ratione et G B est perpendicularis ad B C. Cum igitur recta linea B G duabus rectis lineis B A, B C se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit B G etiam ad planum per B A, B C ductum perpendicularis [f]. Atqui est ad planum per D E, E F perpendicularis. Ergo B G perpendicularis est ad utrumque planorum, quæ per A B, B C, D E, E F transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt [g]. Parallelum igitur est planum per A B, B C plano per D E, E F. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana, parallela erunt. *Q. E. D.*

[d] Def. 3. hujus.

[e] 29. primi.

[f] 4. hujus.

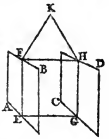
[g] 14. hujus.

PROP.

## PROP. XVI. THEOR. [XVI.]

*Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.*

Duo plana parallela A B, C D a plano aliquo E F H G secentur; communes autem ipsorum sectiones sint E F, G H. Dico E F ipsi G H parallelam esse. Si enim non sint parallelæ, E F, G H productæ inter se convenient, vel ad partes F H, vel ad partes E G. Producantur prius ad partes F H, et conveniant in K. Quoniam igitur E F K est in plano A B; et omnia quæ in E F K sumuntur puncta, in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in E F K, est ipsum K punctum. Ergo K est in plano A B. Eâdem ratione et K est in C D plano. Ergo plana A B, C D producta inter se convenient. Non conveniunt autem, cum parallela ponantur. Non igitur E F, G H rectæ lineæ productæ convenient ad partes F, H. Similiter demonstrabimus neque ad partes E, G convenire, si producantur. Quæ autem neutrâ ex parte conveniunt, parallelæ sunt. Ergo E F ipsi G H est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. *Q. E. D.*

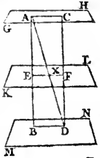



## PROP. XVII. THEOR. [XVII.]

*Si duæ rectæ lineæ a parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.*

Duæ rectæ lineæ A B, C D a parallelis planis G H, K L, M N secentur in punctis A, E, B, C, F, D. Dico ut A E recta linea ad ipsam E B, ita esse C F ad F D. Jungantur enim A C, B D, A D; et occurrat A D plano K L in puncto X; et E X, X F jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela K L, M N a plano E B D X secantur, communes ipsorum sectiones E X, B D parallelæ sunt [a]. Eâdem ratione, quoniam duo plana parallela G H, K L a plano A X F C secantur, communes ipsorum sectiones A C, F X sunt parallelæ.

[a] 16. hujus.



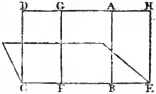

Et

Et quoniam uni laterum trianguli A B D, videlicet ipſi B D, parallela ducta eſt E X, ut A E ad E B, ita erit A X
[l] 2. ſexti. ad X D[l]. Rurſus, quoniam uni laterum trianguli A D C, nempe ipſi A C, parallela ducta eſt X F, erit ut A X ad X D, ita C F ad F D[l]. Oſtenſum autem eſt ut A X ad X D, ita eſſe A E ad E B. Ut igitur A E ad E B, ita eſt C F
[k] 11. quinti. ad F D[k]. Quare ſi duæ rectæ lineæ a parallelis ſecentur planis, in eaſdem proportiones ſecabuntur. *Q. E. D.*

## [XVIII.] PROP. XVIII. THEOR.

*Si recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipſum tranſeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt.*

Recta linea quædam A B ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico et omnia plana, quæ per ipſam A B tranſeunt, ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe. Producatur enim per A B planum D E, ſitque plani D E, et ſubjecti plani communis ſectio C E; et ſumatur in C E quodvis punctum F; a quo ipſi C E ad rectos angulos, in D E plano, ducatur F G. Quoniam igitur A B ad ſubjectum planum eſt perpendicularis; et ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt et in eo-



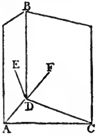

[l] Def. 3. hujus. dem ſunt plano, perpendicularis erit[l]. Quare etiam ad C E eſt perpendicularis. Angulus igitur A B F rectus eſt: ſed et G F B eſt rectus. Ergo A B parallela eſt ipſi F G. Eſt autem A B ſubjecto plano ad rectos angulos.
[m] 8. hujus. Et F G igitur eidem plano ad rectos angulos erit[m]. At planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in
[n] Def. 4. hujus. uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos ſint[n]: at communi planorum ſectioni C E, in uno plano D E, ad rectos angulos ducta F G, oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos eſſe angulos. Ergo planum D E rectum eſt ad ſubjectum planum. Similiter demonſtrabuntur et omnia quæ per A B tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe. Si igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos; et omnia quæ per ipſam tranſeunt plana, eidem plano ad rectos angulos erunt. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

*Si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.*

Duo plana se invicem secantia A B, B C subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit B D. Dico B D subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim. Plana A B, B C secent subjectum planum, secundum rectas A D, C D. Jam neutri illarum ad rectos erit illa B D. Nam si alterutri illarum ad rectos esset, esset etiam ad rectos subjecto plano A D C [o]; cujus contrarium posuimus. A puncto igitur D ducatur, in plano quidem A B, ipsi A D rectæ lineæ ad rectos angulos D E: in plano autem B C ducatur ipsi C D ad rectos angulos D F. Et quoniam planum A B ad subjectum planum rectum est, et communi ipsorum sectioni A D ad rectos angulos in plano A B ducta est D E; erit D E ad subjectum planum perpendicularis [o]. Similiter ostendemus et D F perpendicularem esse ad subjectum planum. Quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eâdem parte; quod fieri non potest [p]. Recta igitur B D subjecto plano non est non ad rectos. Quare D B subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana, se invicem secantia, plano alicui sint ad rectos angulos, et communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. *Q. E. D.*




[o] Def. 4. hujus.

[p] 13. hujus.

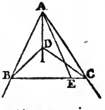
## PROP. XX. THEOR. [XX.]

*Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.*

Solidus angulus ad A tribus angulis planis B A C, C A D, D A B continetur. Dico angulorum B A C, C A D, D A B duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim B A C, C A D, D A B anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Sin minus, trium maximus sit B A C. Manifestum est maximum

B A C,

BAC cum reliquorum alterutro, tertio majorem esse. Sed dico duos BAD, CAD simul sumptos, maximo BAC majores esse. Ad rectam enim lineam AB, et ad punctum in ipsa A, constituatur angulo DAB, in plano per BA, AC transeunte, æqualis angulus BAE [q].




[q] 23. primi.

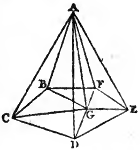
In recta AD sumatur utcunque punctum D, ponaturque ipsi AD æqualis AE; et per E ducta BEC secet rectas lineas AB, AC in punctis B, C; et DB, DC jungantur. Itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB; duæ DA, AB æquales sunt duabus AE, AB; et angulus DAB æqualis est angulo BAE. Basis igitur DB basi BE est æqualis [r]. Et quoniam duæ DB, DC ipsa BC majores sunt [s], quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. Quod cum DA sit æqualis AE, communis autem AC, et basis DC major basi EC; erit angulus DAC angulo EAC major [t]. Sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. Quare DAB, DAC anguli angulo BAC majores sunt. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. *Q. E. D.*

[r] 4. primi.
[s] 20. primi.
[t] 25. primi.

[XXI.] PROP. XXI. THEOR.

*Omnis solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.*

Sit angulus solidus ad A planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB comprehensus. Dico planos illos, simul sumptos, quatuor rectis esse minores. Plana angulorum omnium, qui solidum ad A comprehendunt, secentur plano, cujus communes cum illis interfectiones sint rectæ BC, CD, DE, EF, FB, quæ figuram aliquam rectilineam (trigonam, tetragonam, vel etiam polygoniam, prout numerus angulorum fuerit qui solidum componunt) in plano illo secante formabunt.




A puncto

A puncto A in planum illud ad perpendiculum deducatur A G, quæ plano in G occurrat[a]. Jungantur G B, G C, G D, G E, G F. Jam quot sunt triangula A B C, A C D, A D E, A E F, A F B vertice communi A, tot erunt in plano G B C, G C D, G D E, G E F, G F B vertice communi G. Quapropter anguli omnes omnium triangulorum, vertice communi A, simul sumpti, angulis omnibus omnium triangulorum in plano, vertice communi G, simul sumptis, æquales erunt. Sed anguli omnes omnium triangulorum in plano, vertice communi G, anguli sunt figuræ rectilinearis B C D E F cum angulis omnibus circa punctum G. Anguli igitur omnes omnium triangulorum vertice communi A, angulis omnibus figuræ B C D E F cum angulis circa punctum G æquales sunt. Jam vero cum solidus angulus ad B tribus planis angulis contineatur, A B F, A B C, C B F, duo quilibet eorum reliquo majores erunt[t]. Duo igitur A B C, A B F reliquo C B F majores. Eodem modo ostendemus (propter angulum solidum ad C tribus A C B, A C D, B C D comprehensum) duos A C B, A C D simul reliquo B C D majores. Et sic per angulos reliquos omnes ad puncta D, E, F pergendo, efficiemus tandem angulos omnes ad bases triangulorum omnium A B C, A C D, A D E, A E F, A F B, quorum vertex communis A, angulis omnibus figuræ B C D E F majores esse. Jam vero cum anguli omnes triangulorum omnium, vertice communi A, angulis omnibus figuræ planæ B C D E F cum omnibus circa punctum G æquales sint, (id enim ostensum) omnes autem ad bases triangulorum omnibus figuræ planæ majores; omnino omnes ad verticem triangulorum communem A, qui sunt omnes, qui solidum ad A comprehendunt, omnibus circa punctum G minores erunt. Omnes autem circa G quatuor rectis sunt æquales[u]. Omnes igitur, qui solidum ad A comprehendunt, simul sumpti, quatuor rectis sunt minores. Q. E. D.

[a] 11. hujus.
[t] 20. hujus.
[u] Cor. 2. 15. primi.

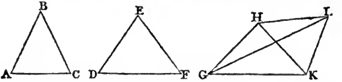
* SCHOLION.

Theonis demonstrationem repudiavimus, utpote propositionis generalis minime generalem. Demonstrationi huic nostræ haud absimilem, collatione factâ angulorum planorum solidum continentium cum angulis figuræ in plano polygoniæ, sed alio modo concinnatam, et ante nos Simpsonus protulit; qui tamen casum anguli solidi, tribus planis comprehensi, ab aliis inutiliter separavit.

[XXII.] PROP. XXII. THEOR.

*Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.*

Sint tres anguli plani, A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti. Et æquales sint lineæ rectæ A B, B C, D E, E F, G H, H K.



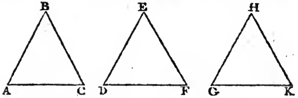

Jungantur autem A C, D F, G K. Dico, ex tribus lineis rectis, quæ sint tribus illis A C, D F, G K singulæ singulis æquales, triangulum posse constitui. Et primum, si æquales inter se sint anguli tres, A B C, D E F, G H K, manifestum est, cum in hoc casu æquales sint rectæ A C, D F, G K, ex tribus, quæ illis æquales sint, triangulum posse constitui. Sed anguli illi ad B, E, H non sint inter se æquales. Et ad rectam H K, ad punctum H, constituatur angulus K H L, angulo A B C æqualis. Capiatur H L, uni ipsarum A B, B C, D E, E F, G H, H K æqualis, et jungantur G L, K L. Jam in triangulis A B C, K H L, cum sint duæ A B, B C duabus K H, H L æquales, et angulus A B C angulo K H L æqualis; erit basis A C,
[x] 4. primi. æqualis basi K L [x]. Et quoniam anguli A B C, G H K, simul sumpti, angulo D E F sunt majores; erit angulus G H L (qui duobus illis A B C, G H K, simul sumptis, est æqualis) angulo D E F major. Rursum quoniam duæ G H, H L duabus D E, E F, singulæ singulis, sunt æquales, et angulus G H L major angulo D E F; erit basis G L basi
[y] 24. primi. D F major [y]. Sed duæ G K, K L simul ipsâ G L sunt
[z] 20. primi. majores [z]. Multo igitur majores quam D F. Sed A C æqualis est ipsi K L. Duæ igitur G K, A C simul ipsâ D F sunt majores. Similiter demonstrabimus, et A C, D F simul ipsâ G K majores. Et D F, G K simul ipsâ A C majores. Fieri igitur potest, ut ex tribus lineis rectis, quæ tribus illis A C, D F, G K, singulæ singulis, sint æquales, triangulum constituatur. *Q. E. D.*

PROP.

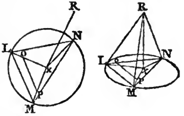
## PROP. XXIII. PROBL. [XXIII.]

*Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem tres angulos quatuor rectis eſſe minores.*

Sint dati tres anguli plani A B C, D E F, G H K, quorum duo reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti, ſintque tres anguli quatuor rectis minores. Oportet ex

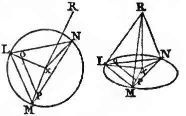



angulis, qui ipſis A B C, D E F, G H K æquales ſint, ſolidum angulum conſtituere. Abſcindantur æquales A B, B C, D E, E F, G H, H K; et A C, D F, G K jungantur. Fieri igitur poteſt ut ex rectis lineis, quæ ipſis A C, D F, G K æquales ſint, conſtituatur triangulum [a]. Itaque conſtituatur L M N; ita ut L M quidem ſit æqualis ipſi A C, M N vero ipſi D F; et præterea L N ipſi G K [b]; et circa L M N triangulum circulus L M N deſcribatur [c]: ſumaturque ipſius centrum X, quod vel erit intra triangulum L M N, vel in laterum ejus uno, vel extra. Sit primo intra; et L X, M X, N X jungantur. Dico A B majorem eſſe ipſâ L X. Si enim non ita ſit, vel A B erit æqualis ipſi L X, vel eâ minor. Sit primo æqualis. Quoniam igitur A B eſt æqualis L X, atque eſt A B ipſi B C æqualis; erit L X æqualis B C. Eſt autem L X æqualis X M. Duæ igitur A B, B C duabus L X, X M æquales ſunt, altera alteri; et A C baſis baſi L M æqualis ponitur. Quare angulus A B C angulo L X M eſt æqualis [d]. Eâdem ratione et angulus quidem D E F eſt æqualis angulo M X N, angulus vero G H K angulo




a 22. hujus.
b 22. primi.
c 5. quarti.
d 8. primi.

gulo N X L. Tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L æquales sunt. Sed tres L X M, M X N, N X L quatuor rectis sunt æquales [e]. Ergo et tres A B C, D E F, G H K æquales erunt quatuor rectis. Atqui ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. Non igitur A B ipsi L X est æqualis.




e Cor. 2. 15. primi.

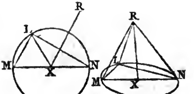
Dico præterea neque A B minorem esse ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor, et ponatur ipsi quidem A B æqualis X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B est æqualis B C, et X O ipsi X P æqualis erit. Ergo et reliqua O L reliquæ P M est æqualis; ac propterea L M parallela est ipsi O P [f]; et L M X triangulum triangulo O P X æquiangulum. Est igitur ut X L ad L M, ita X O ad O P [g]; et permutando ut X L ad X O, ita L M ad O P. Major autem est L X quam X O. Ergo et L M quam O P est major. Sed L M posita est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ A B, B C duabus O X, X P æquales sunt, et basis A C major basi O P; erit angulus A B C angulo O X P major [h]. Similiter demonstrabimus et D E F angulum majorem esse angulo M X N, et angulum G H K angulo N X L; tres igitur anguli A B C, D E F, G H K tribus L X M, M X N, N X L sunt majores. At anguli A B C, D E F, G H K quatuor rectis minores ponuntur. Multo igitur anguli L X M, M X N, N X L minores erunt quatuor rectis. Sed et æquales [e]; quod est absurdum. Non igitur A B minor est quam L X. Ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo major sit necesse est.

f 2. sexti.

g 4. sexti.

h 25. primi.

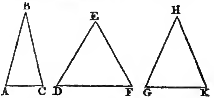
Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in M N, quod sit X, et X L jungatur. Dico rursus A B majorem esse ipsâ L X. Si enim non



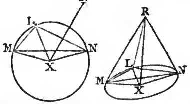

ita

ita sit, vel A B est æqualis L X, vel ipsâ minor. Sit primo æqualis. Duæ igitur A B, B C, hoc est, D E, E F, duabus M X, X L, hoc est, ipsi M N æquales sunt. Sed M N ponitur æqualis D F. Ergo D E, E F ipsi D F sunt æquales; quod fieri non potest [p]. Non igitur A B est æ- p 20. primi.
qualis L X. Similiter neque minor. Multo enim magis id, quod fieri non potest, sequeretur. Ergo A B ipsâ L X major est.

Sed sit centrum circuli extra triangulum L M N, quod sit X; et L X, M X, N X jungantur. Dico et sic A B ipsâ L X majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. Sit primo æqualis. Ergo duæ A B, B C duabus M X, X L æquales sunt, altera alteri; et basis A C est æqualis basi M L. Angulus igitur A B C æqualis est angulo M X L. Eâdem ratione et G H K angulus ipsi L X N est æqualis; ac propterea totus M X N

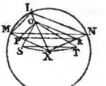



æqualis duobus A B C, G H K. Sed et anguli A B C, G H K angulo D E F majores sunt. Et angulus igitur M X N ipso D E F est major. At quoniam duæ D E,




E F duabus M X, X N æquales sunt, et basis D F æqualis basi M N; erit M X N angulus angulo D E F æqualis. Ostensus autem est major; quod est absurdum. Non igitur A B est æqualis L X.

Dico vero neque minorem esse A B ipsâ L X. Si enim fieri potest, sit minor; et ipsi quidem A B æqualis ponatur X O, ipsi vero B C æqualis X P; et O P jungatur. Quoniam igitur A B ipsi B C est æqualis; erit X O æqualis X P. Ergo et reliqua O L reliquæ P M æqualis. [k 2. sexti.] Parallela igitur est L M ipsi P O[k]; et triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum est. Quare ut X L ad [l 4. sexti.] L M, ita X O ad O P[l]; et permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P.




Major autem est L X quam X O. Ergo L M quam O P est major. Sed L M est æqualis A C. Et A C igitur quam O P major erit. Itaque quoniam duæ A B, B C duabus O X, X P sunt æquales, altera alteri; et basis A C major est basi O P; erit angulus A B C angulo [m 25. primi.] O X P major[m]. Similiter si X R sumatur æqualis utrivis ipsarum X O, X P, et jungatur O R; ostendemus angulum G H K angulo O X R majorem. Constituatur ad rectam lineam L X, et punctum in ipsâ X, angulo quidem A B C æqualis angulus L X S, angulo autem G H K æqualis L X T; et ponatur utraque X S, X T ipsi O X æqualis; junganturque O S, O T, S T. Et quoniam duæ A B, B C duabus O X, X S æquales sunt, et angulus A B C æqualis angulo O X S; erit basis A C, hoc est, L M basi O S æqualis. Eâdem ratione, et L N est æqualis ipsi O T. Quod cum duæ M L, L N duabus O S, O T sint æquales; et angulus M L N major angulo S O T †; erit et basis M N basi S T major. Sed M N est æqualis D F. Ergo et D F quam S T major erit. Quoniam igitur duæ D E, E F duabus S X, X T æquales sunt, et basis D F major basi S T; erit angulus D E F angulo S X T major. Æqualis autem est angulus S X T angulis A B C, G H K. Ergo D E F angulus angulis A B C, G H K major est; sed et minor; quod fieri non potest.

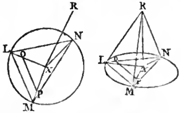
Utcunque igitur cadat centrum circuli, recta A B major erit quam L X.

† *Angulus autem* M L N *angulo* S O T *major sic ostenditur. In triangulo isosceles* L X M, *angulus ad verticem* L X M *angulo* O X S, *ad verticem isoscelis* O X S, *minor est*[o]. *Quapropter angulus* X L M *ad basin isoscelis* L X M *angulo* X O S *ad basin isoscelis* O X S *major erit*[p]. *Simili modo ostendatur angulus* X L N *angulo* X O T *major. Totus igitur* M L N, *ex duobus* X L M, X L N *compositus, toto* S O T, *ex duobus* X O S, X O T *composito, major.* Q. E. D.

[o Ex construct.] [p 5. & 32. primi.]

Consti-

Constituatur a puncto X circuli L M N plano ad rectos angulos X R [a]. Et excessui, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum, quod sit ex R X; et R L, R M, R N jungantur. Quoniam igitur R X perpendicularis est ad planum L M N circuli, et ad unamquamque ipsarum L X, M X, N X erit perpendicularis [o]. Et quoniam L X est æqualis X M, communis autem et ad rectos angulos X R; erit basis L R æqualis basi R M [p]. Eâdem ratione, et R N utrique ipsarum R L, R M est æqualis. Tres igitur rectæ lineæ R L, R M, R N inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum ex X R ponitur æquale excessui, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B quadratis ex L X, X R æquale. Quadratis autem ex L X, X R æquale est quadratum ex R L [q]; rectus enim angulus est L X R. Ergo quadratum ex A B quadrato ex R L æquale erit; ideoque A B ipsi R L est æqualis. Sed ipsi quidem A B æqualis est unaquæque ipsarum B C, D E, E F, G H, H K: ipsi vero R L æqualis utraque ipsarum R M, R N. Unaquæque igitur ipsarum A B, B C, D E, E F, G H, H K unicuique ipsarum R L, R M, R N est æqualis. Quod cum duæ R L, R M duabus A B, B C æquales sint, et basis L M ponatur æqualis basi A C: erit angulus L R M æqualis angulo A B C [r]. Eâdem ratione, et angulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N angulo G H K est æqualis. Ex tribus igitur angulis planis L R M, M R N, L R N, qui æquales sunt tribus datis A B C, D E F, G H K, solidus angulus constitutus est ad R. *Q. E. F.*




[a] 12. hujus.
[o] Def. 3. hujus.
[p] 4. primi.
[q] 47. primi.
[r] 8. primi.

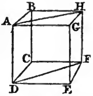
## PROP. XXIV. THEOR. [XXIV.]

*Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, et æqualia, et parallelogramma erunt.*

Solidum enim C D G H parallelis planis A C, G F; B G, C E; F B, A E contineatur. Dico opposita ejus plana, et æqualia, et parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela B G, C E a plano A C secantur, communes

 ipsorum

[s] 16. hujus. ipforum fectiones parallelæ funt[s]: ergo A B ipfi C D eft parallela. Rurfus quoniam duo plana parallela B F, A E fecantur a plano A C, communes ipforum fectiones parallelæ funt[s]: parallela igitur eft A D ipfi B C. Oftenfa autem eft et A B parallela C D. Ergo A C parallelogrammum erit. Similiter demonftrabimus, et unumquodque ipforum C E, F G, G B, B F, A E parallelogrammum




effe. Jungantur A H, D F. Et quoniam parallela eft A B quidem ipfi D C; B H vero ipfi C F; erunt duæ A B, B H, fefe tangentes, duabus D C, C F, fefe tangentibus, parallelæ; et non in eodem plano: quare æquales
[t] 10. hujus. angulos continebunt[t]. Angulus igitur A B H angulo D C F eft æqualis. Et quoniam duæ A B, B H duabus
[u] 34. primi. D C, C F æquales funt[u]; et angulus A B H æqualis
[x] 4. primi. angulo D C F; erit bafis A H bafi D F æqualis[x]; et A B H triangulum æquale triangulo D C F. Quod cum ipfius quidem A B H trianguli duplum fit B G parallelogrammum; ipfius vero D C F trianguli, duplum parallelo-
[y] 41. primi. grammum C E[y]: erit B G parallelogrammum æquale parallelogrammo C E. Similiter demonftrabimus et A C parallelogrammum parallelogrammo G F; et parallelogrammum A E parallelogrammo B F æquale effe. Si igitur folidum parallelis planis contineatur, oppofita ipfius plana, et æqualia, et parallelogramma funt. *Q. E. D.*

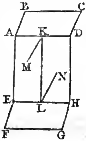
*Cor.* Ex jam demonftratis conftat, fi folidum parallelis contineatur planis, oppofita ipfius plana, et æqualia effe, et fimilia; quippe quæ et fingulos angulos æquales, et circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

### * LEMMA.

Si quo plana parallela fecentur plano, fimiliter ei inclinata funt.

Plana parallela A B C D, E F G H plano A E H D fecentur. Dico plana A B C D, E F G H plano A E H D fimiliter inclinata effe. Sint rectæ A D, E H communes plani A E H D cum planis parallelis interfectiones. Rectæ
[z] 16. hujus. igitur A D, E H erunt inter fe parallelæ[z]. In rectâ A D fumatur punctum quodvis K. A puncto K, in plano A E H D, rectæ A D ad perpendiculum educatur K L, quæ rectæ

rectæ E H, ipsi A D parallelæ, in L occurrat. Ab eodem puncto K, in plano A B C D, ad perpendiculum rectæ A D educatur K M. Angulus L K M planorum A E H D, A B C D mutua erit inclinatio [a]. Planum rectarum M K, K L secet planum E F G H in rectâ L N. Rectæ igitur K M, L N, quæ communes sunt plani M K L cum planis parallelis A B C D, E F G H interfectiones, inter se parallelæ erunt [b]. Sed A K, E L parallelæ; id enim ostensum. Angulus igitur N L E angulo A K M æqualis [c]. Angulus autem A K M rectus [d]. Rectus igitur N L E. Recta igitur N L in plano E F G H ad perpendiculum est rectæ E H. Sed recta K L in plano A E H D ad perpendiculum erit eidem E H, cum ad perpendiculum sit rectæ A D [d], cui parallela est E H. Angulus igitur K L N planorum A E H D, E F G H est mutua inclinatio [e]. Sed angulus L K M planorum A E H D, A B C D est mutua inclinatio; id enim ostensum. Et propter parallelas K M, L N, anguli L K M, K L N sunt inter se æquales [f]. Plana igitur A B C D, E F G H plano A E H D similiter sunt inclinata. *Q. E. D.*




[a] Def. 6. hujus.

[b] 16. hujus.

[c] 10. hujus.

[d] Per construct.

[e] Def. 6. hujus.

[f] 29. primi.

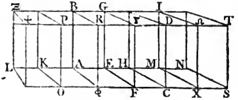
*Cor.* *. Parallela plana parallelis planis similiter sunt inclinata.

## PROP. XXV. THEOR. [XXV.]

*Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.*

Solidum enim parallelepipedum A B C D plano Y E secetur, oppositis planis R A, D H parallelo. Dico ut E F Φ A basis ad basim E H C F, ita esse A B F Y solidum ad solidum E G C D. Producatur enim A H ex utrâque parte; et ponantur ipsi quidem E H æquales quotcunque H M, M N; ipsi vero A E, æquales quotcunque A K, K L; et compleantur parallelogramma L O, K Φ, H X, M S; et solida L P, K R, H Ω, M T. Quoniam igitur æquales inter se sunt L K, K A, A E rectæ lineæ; erunt et parallelogramma L O, K Φ, A F inter se æqualia [g]; quin et

[g] 1. sexti.




et similia esse manifestum est: itemque æqualia et similia inter se parallelogramma K Ξ, K B, A G; et adhuc parallelogramma L Ψ, K P, A R, inter se æqualia; opposita enim sunt[g]; et hæc quoque inter se similia. Quin et plana parallela L Ψ, K P, A R, E Y parallelis Ψ G, L F similiter esse inclinata; parallela item F Ψ, H Ξ parallelis Y Ξ, F L; necnon parallelis Ψ L, Y E similiter esse inclinata, ex Lemmate et Corollario ejus manifestum est. Eâdem ratione, et parallelogramma E C, H X, M S æqualia inter se sunt, et similia: itemque parallelogramma H G, H I, I N inter se æqualia, et similia. Et horum omnium, sicut priorum, plana parallela parallelis aliis similiter sunt inclinata. Et insuper parallelogramma D H, M Ω, N T. Tria igitur plana solidorum L P, K R, A Y tribus planis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata. Sed tria tribus oppositis sunt æqualia, et similia, et similiter inclinata. Ergo solida L P, K R, A Y inter se æqualia erunt[h]. Eâdem ratione, et solida E D, H Ω, M T sunt æqualia inter se. Quotuplex igitur est basis L F ipsius A F basis, totuplex est et L Y solidum solidi A Y. Eâdem ratione, quotuplex est N F basis ipsius basis H F, totuplex est et solidum N Y ipsius E D solidi. Et si basis L F est æqualis basi N F, et solidum L Y solido N Y æquale erit; et si basis L F superat N F basim, et L Y solidum N Y superabit; et si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus A F, F H, et duobus solidis A Y, E D; sumpta sunt æquimultiplicia, basis quidem A F, et A Y solidi, videlicet basis L F, et solidum L Y; basis vero H F, et E D solidi, nempe basis N F, et solidum N Y. Et demonstratum est, si basis L F superat basim N F, et L Y solidum solidum N Y superare; et si æqualis, æquale; et si minor minus. Est igitur ut A F basis ad basim F H, ita A Y solidum ad solidum E D[i]. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis

[g] 24. hujus.

[h] Cor. 8 Def. 11. hujus.

[i] Def. 5. quinti.

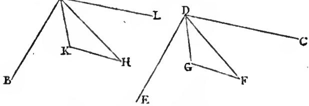
fitis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. *Q. E. D.*

*Cor.* * Omnis parallelepipedi parallelogramma contigua similiter inter se, atque opposita contigua, inclinata sunt.

PROP. XXVI. PROBL. [XXVI.]

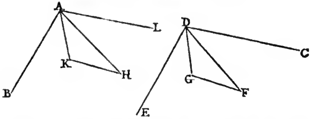
*Ad datam rectam lineam, et ad datum in ipsâ punctum, dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.*

Sit data quidem recta linea A B, datum autem in ipsâ punctum A, et datus solidus angulus ad D. Oportet




ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ipsâ punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Solidus ad D vel tribus angulis planis continetur, vel pluribus. Primum tribus contineatur E D C, E D F, F D C. Sumatur in lineâ D F quodvis punctum F; a quo ad planum per E D, D C transiens ducatur perpendicularis F G [k], quæ plano in puncto G occurrat; jungaturque D G: et ad rectam lineam A B, et ad datum in ipsâ punctum A, angulo quidem E D C æqualis angulus constituatur B A L [l]; angulo autem E D G in ipso plano B A L constituatur æqualis B A K. Deinde ipsi D G ponatur æqualis A K, et a puncto K, plano per B A L ad rectos angulos, erigatur H K [m]; ponaturque ipsi G F æqualis K H; et H A jungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulis B A L, B A H, H A L continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis E D C, E D F, F D C contento. Admoveatur enim punctum A puncto D; recta autem A B rectæ D E applicetur, et planum B A L plano E D C superimponatur. Ita propter angulos B A L, E D C æquales [n], recta A L rectæ D C se applicabit;

[k] 11. hujus.
[l] 23. primi.
[m] 10. hujus.
[n] Per construct.

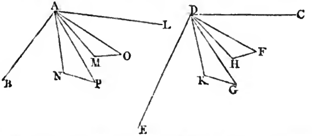



applicabit; et propter æquales angulos B A K, E D G, recta A K rectæ D G. Sed recta A K æqualis rectæ D G [a]. Punctum igitur K puncto G incidet. Planis autem B A L, E D C congruentibus, punctis etiam K, G in unum convenientibus, rectæ K H, G F, quæ a punctis illis ad perpendiculum eductæ sunt congruentibus planis, et ipsæ congruent. Et cum K H ipsi G F æqualis sit [a], punctum H ipsi F incidet. Et punctis A, D in unum quoque compositis, rectæ A H, D F congruent. Tribus autem rectis A B, A L, A H tribus D E, D C, D F singulatim congruentibus, angulus solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, ei æqualis erit. *Q. E. D.*

[a] Per construct.

CAS. 2. Jam vero solidus ad D contineatur angulis planis plus tribus. Puta, planis E D C, C D F, F D G, G D E.

Sumantur in rectis D F, D G, puncta quælibet F, G. Et a punctis F, G in planum E D C ad perpendiculum




deducantur rectæ F H, G K [c], quæ plano illi in punctis H, K occurrant. Jungantur D H, D K. Jam vero ad rectam A B, ad punctum in ea A, angulo E D C æqualis consti-

[c] 11. hujus.

constituatur B A L; item in plano B A L angulo E D H æqualis B A M; et angulo E D K æqualis B A N. Capiantur A M, A N illis D H, D K singulatim æquales. A punctis M, N plano B A L ad perpendiculum educantur M O, N P[p]; capiantur N P, M O illis K G, H F singulatim æquales. Denique jungantur A P, A O. Dico factum esse, quod fieri oportuit. Nempe ad rectam A B, et punctum in eâ A, constitutum esse angulum solidum, planis angulis B A L, L A O, O A P, P A B contentum, æqualem solido ad D, planis E D C, C D F, F D G, G D E contento. [p] 12. hujus.

Puncto enim A, ut in casu priore, puncto D admoto, rectâ A B rectæ D E applicatâ, planoque B A L plano E D C superimposito; propter angulos B A L, B A M, B A N angulis E D C, E D H, E D K, singulos singulis, æquales[q], rectæ A L, A M, A N rectis D C, D H, D K singulatim se applicabunt. Unde propter rectas A M, A N rectis D H, D K, singulas singulis, æquales, puncta M, N punctis H, K singulatim incident. Unde propter rectas M O, N P plano B A L, rectasque H F, K G plano E D C, ad perpendiculum eductas; et propter illas M O, N P alteris H F, K G æquales; efficietur puncta O, P punctis F, G singulatim incidere. Quapropter rectæ A O, A P rectis D F, D G singulatim congruent. Ita vero rectæ A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G, singulæ singulis, congruent. Angulus igitur solidus ad A solido ad D congruet, et, congruendo, illi æqualis erit. Ad datam igitur rectam lineam &c. *Q. E. F.* [q] Per construct.

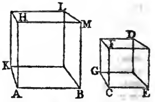
*Cor.** Ex constructione manifestum est angulos planos, qui solidum ad A constituunt, planis, qui solidum ad D, æquales esse; et plana planis similiter esse inclinata. Rectis enim A B, A L, A O, A P rectis D E, D C, D F, D G congruentibus, congruent tum anguli plani, tum angulorum plana. Hoc tamen haud ita intelligendum est, quasi solidi anguli æquales esse nesciant, nisi planis angulis æqualibus, et planis similiter inclinatis contineantur; sed eâ conditione futuros solidos, qui ope hujus problematis constituuntur æquales.

PROP.

[XXVII.] PROP. XXVII. PROBL.

*Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere.*

Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. Oportet ad datam rectam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B, et ad datum in ipsa punctum A, angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis planis B A H, H A K, K A B contineatur [q]. Hi plani planis solidum ad C continentibus, singuli singulis, æquales erunt, et æqualium plana similiter inclinata erunt [r]. Sunto æquales B A H, E C F; H A K, F C G; B A K, E C G. Et fiat ut E C ad C G, ita B A ad A K; ut autem G C ad C F, ita K A ad A H [s]. Ergo ex æquali ut E C ad C F, ita erit B A ad A H. Compleatur parallelogrammum B H, et A L solidum. Quoniam igitur est ut E C ad C G, ita B A ad A K; erit parallelogrammum K B parallelogrammo G E simile: nempe, cum circa æquales angulos E C G, B A K latera sunt proportionalia. Eâdem quoque ratione parallelogrammum K H simile est parallelogrammo G F, et parallelogrammum H B parallelogrammo F E. Tria igitur parallelogramma solidi A L tribus parallelogrammis solidi C D similia sunt, et similiter inclinata: sed tria tribus oppositis in utroque solido sunt æqualia, et similia [t], et similiter inclinata [t]. Ergo totum A L solidum toti solido C D simile erit. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato solido parallelepipedo C D simile, et similiter positum, solidum parallelepipedum A L descriptum est. *Q. E. F.*



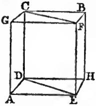

[q] 26. hujus.
[r] Cor. 26. hujus.
[s] 12. sexti.
[t] Cor. 24. hujus.
[t] Cor. 25. hujus.

[XXVIII.] PROP. XXVIII. THEOR.

*Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.*

Sit solidum parallelepipedum A B. Oppositorum ejus parallelogrammorum C G F B, D A E H ducantur diagonales C F, D E. Jam cum recta C D parallela et æqualis sit rectæ G A (nempe cum opposita sint parallelogrammi

lelogrammi C A latera) cum eidem G A recta F E parallela et æqualis fit; rectæ C D, F E inter fe funt parallelæ et æquales [t]. In plano igitur funt rectæ quatuor C F, D E, C D, F E [u]. Dico folidum A B a plano C D E F bifariam fecari. Quoniam enim æquale et fimile eft C G F triangulum triangulo C B F, triangulum vero A D E triangulo D E H [x]; eft autem et C A parallelogrammum parallelogrammo B E æquale et fimile [y], oppofitum enim eft; et parallelogrammum G E æquale et fimile parallelogrammo C H: quoniam etiam parallelepipedi A B contigua quælibet parallelogramma fimiliter oppofitis inter fe funt inclinata [z]: quoniam denique planum C D E F parallelis planis G B, A H fimiliter eft inclinatum, necnon parallelis A F, C H; A C, E B: erit prifma contentum duobus triangulis C G F, A D E, et tribus parallelogrammis G E, A C, C E, æquale prifmati, quod continetur duobus triangulis C F B, D E H, et tribus parallelogrammis C H, B E, C E; etenim planis, et numero et magnitudine æqualibus, et fimilibus, et fimiliter inclinatis, continentur. Ergo totum A B folidum a plano C D E F bifariam fecatur. *Q. E. D.*

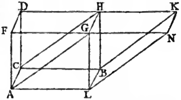



[t] 9. hujus, et Ax. 1. primi.
[u] 7. hujus.
[x] 34. primi.
[y] 24. hujus.
[z] Cor. 25. hujus.

## PROP. XXIX. THEOR. [XXIX.]

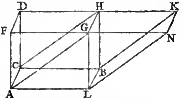
*Solida parallelepipeda, quæ in eâdem funt bafi, et eâdem altitudine, quorum ftantes lineæ funt in eifdem rectis lineis, inter fe funt æqualia.*

Sint enim in eâdem bafi A B folida parallelipida A H, A K, eâdem altitudine; quorum ftantes A F, A G, L G, L N; C D, C H, B H, B K fint in eifdem rectis lineis F N, D K. Dico folidum A H folido A K æquale effe. Parallelepipedi A K ftans parallelogrammum C G ftanti L H oppofito alterius parallelepipedi A H, vel ad ipfum planum D N occurrit, vel productum fupra ipfum, vel infra.



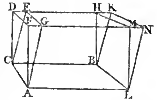

CAS.

CAS. 1.* Primum occurrat ſtans C G ſtanti L H ad ipſum planum D N. Ita vero plana C G, L H ipſum D N in eâdem lineâ rectâ H G ſecant; et parallelogramma D G, G K; necnon A H, B G, latus commune habent H G. Parallelepipedum autem A H plano A G H C per diagonales ſecatur. Parallelepipedum item A K per diagonales plano B H G L. Priſma igitur triangulis duobus A L G, C B H, et parallelogrammis tribus B A, B G, G C comprehenſum, dimidium erit parallelepipedi A H, et idem priſma parallelepipedi A K dimidium [a]. Solidum igitur A H ſolido A K æquale. *Q. E. D.*




[a] 28. hujus.

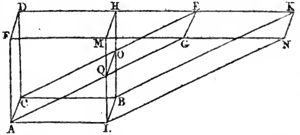
CAS. 2. Jam vero ſtantia C G, L H non niſi producta ſupra planum D N conveniant. Quoniam igitur parallelogrammum eſt utrumque ipſorum C H, C K; erit C B utrique ipſarum D H, E K æqualis [b]: ergo et D H eſt æqualis E K. Communis auferatur E H. Reliqua igitur D E æqualis eſt reliquæ H K. Quare et D E C triangulum eſt æquale et ſimile triangulo H K B [c]. Parallelogrammum autem D G eſt æquale et ſimile parallelogrammo H N. Eâdem ratione et A F G triangulum æquale et ſimile eſt triangulo L M N. Eſt autem parallelogrammum C F parallelogrammo B M, et parallelogrammum C G parallelogrammo B N æquale et ſimile, oppoſita enim ſunt [d]. Præterea plana A D, A E ſimiliter inter ſe ac parallela illis plana L H, L K inclinata ſunt. Planum etiam D N planis triangulorum D C E, F A G, H B K, M L N parallelis ſimiliter eſt inclinatum. Quin et idem planum D N parallelogrammorum A D, L H planis parallelis ſimiliter eſt inclinatum; necnon planis parallelogrammorum A E, L K parallelis [e]. Ergo et priſma contentum duobus triangulis A F G, D E C et tribus parallelogrammis




[b] 34. primi.
[c] 8. primi.
[d] 24. hujus.
[e] Per Lem. et Cor. * 24. hujus.

lelogrammis A D, D G, G C eſt æquale priſmati, quod duobus triangulis L M N, H B K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N continetur. Commune apponatur ſolidum, cujus baſis quidem parallelogrammum A B, oppoſitum autem ipſi G E H M. Ergo totum A H ſolidum parallelepipedum toti ſolido parallelepipedo A K eſt æquale. *Q. E. D.*

CAS. 3.* Denique conveniant ſtantia C G, L H infra planum D N, ſitque communis eorum interſectio O Q,




quæ rectæ C A, ac proinde rectis H M, E G parallela erit. (Nimirum cum O Q, C A communes ſint plani C G cum parallelis planis A D, L H interſectiones, et C A rectæ F D, atque idcirco utrique illarum H M, E G ſit parallela.) Priſma duobus triangulis A F G, C D E et tribus parallelogrammis A D, D G, G C comprehenſum æquale eſſe priſmati, duobus triangulis L M N, B H K et tribus parallelogrammis B M, N H, B N comprehenſo, eodem modo oſtendetur, quo in caſu priori. Æqualibus hiſce auferatur pars communis, priſma utique, quod duobus triangulis Q M G, O H E et tribus parallelogrammis Q H, H G, G O continetur. Quæ reliqua fuerint inter ſe æqualia erunt. Id eſt, ſolidum, trapeziis duobus Q M F A, O H D C et parallelogrammis quatuor O M, C F, M D, Q C comprehenſum, ſolido, trapeziis duobus L Q G N, B O E K et parallelogrammis quatuor B Q, E N, O G, B N comprehenſo, æquale erit. Hiſce ſolidis æqualibus commune apponatur priſma, duobus triangulis A L Q, C B O et tribus parallelogrammis Q B, Q C, C L comprehenſum, fiet ſolidum totum A H toti C K æquale. *Q. E. D.*

 Ubicunque

Ubicunque igitur conveniant ſtantia C G, L H, parallelepipedum parallelepipedo æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. *Q. E. D.*

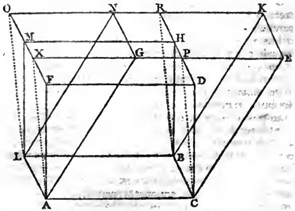
* SCHOLION.

Propoſitionem univerſam in caſus tres diſtribuendam Simpſonus primus, juniorum ſaltem, intellexit. Caſûs ſecundi et tertii elegantiſſimam ſane Viri magni demonſtrationem nos lubenter certe in noſtras ſchedas tranſtuliſſemus, niſi Euclidis ipſius veſtigia non perſequi religio eſſet. Secundi autem caſûs demonſtrationem (qualem nunc eam emendatam damus) ab Euclide minime abjudicamus, licet ita Simpſonus ſententiam tulerit.

[XXX.] PROP. XXX. THEOR.

*Solida parallelepipeda, quæ in eâdem ſunt baſi, et eâdem altitudine, quorum ſtantes non ſunt in iiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.*

Sint in eâdem baſi A B ſolida parallelepipeda C M, C N, et eâdem altitudine, quorum ſtantes A F, A G, L M,




L N; C D, C E, B H, B K non ſint in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum C M ſolido C N æquale eſſe. Recta enim

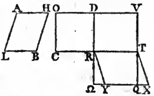
D H,

D H, si opus sit producta, rectis G E, N K, si opus sit productis, in punctis P, R occurrat. Recta item F M, si opus sit producta, eisdem G E, N K, si opus sit productis, in X, O occurrat. Et A X, L O, C P, B R jungantur. Solidum C M, cujus basis quidem A C B L parallelogrammum, oppositum autem ipsi F D H M, est æquale solido C O, cujus basis parallelogrammum A C B L et ei oppositum X P R O; in eâdem enim sunt basi A C B L, et ipsorum stantes A F, A X, L M, L O; C D, C P, B H, B R sunt in eisdem rectis lineis F O, D R[f]. Sed solidum C O, cujus basis quidem parallelogrammum A C B L, oppositum autem ipsi X P R O, est æquale solido C N, cujus basis A C B L parallelogrammum, et ipsi oppositum G E K N[f]. Etenim in eâdem sunt basi A C B L, et eorum stantes A G, A X, C E, C P; L N, L O, B K, B R sunt in eisdem rectis lineis G P, N R. Quare et C M solidum solido C N æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eâdem sunt basi, et eâdem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.* f 29. hujus.

## PROP. XXXI. THEOR. [XXXI.]

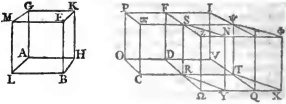
*Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia.*

Sint in æqualibus basibus A B, C D solida parallelepipeda A E, C F, et eâdem altitudine. Dico solidum A E solido C F æquale esse. Sint primo stantes † H K, B E, A G, L M; O P, D F, C E, R S ad rectos angulos basibus A B, C D: angulus autem A L B angulo C R D




sit inæqualis, et producatur ipsi C R in directum R T: constituaturque ad rectam lineam R T, et ad punctum in ipsâ R, angulo A L B æqualis angulus T R Y[g]. Et ponatur ipsi quidem A L æqualis R T, ipsi vero L B æqualis R Y; et ad punctum Y ipsi R T parallela ducatur X Y, compleaturque parallelogrammum R X, et Y Y solidum. Quoniam igitur duæ T R, R Y duabus A L, L B æquales sunt, et angulos continent æquales; erit parallelogrammum R X æquale et simile parallelogrammo g 23. primi.

† *Vide diagramma paginæ sequentis.*




H L; et quoniam rursus A L est æqualis R T, et L M ipsi R S, angulosque æquales continent, parallelogrammum R Ψ parallelogrammo A M æquale et simile erit. Eâdem ratione L E parallelogrammum ipsi S Y æquale est et simile. Tria igitur parallelogramma solidi A E tribus parallelogrammis solidi Ψ Y æqualia et similia sunt. Præterea cum rectæ M L, S R plana L H, R X ad perpendiculum insistant; plano L H plana omnia per M L, plano autem R X omnia per R S, ad perpendiculum erunt [g]. Plano igitur L H ad perpendiculum sunt L E, L G plana; plano item R X plana R N, R Ψ. Rursum recta L M, cum ad perpendiculum sit plano L H, rectarum L A, L B utrique, cum sint in illo plano, ad perpendiculum erit. Est autem illa L M planorum L E, L G communis interfectio. Quare angulus A L B mutua est planorum L G, L E inclinatio [h]. Similiter ostendemus angulum Y R T planorum R N, R Ψ mutuam esse inclinationem. Anguli autem A L B, Y R T sunt inter se æquales. Plana igitur L G, L E similiter inter se, ac plana R N, R Ψ inclinata sunt. Solidi igitur A E tria contigua parallelogramma L H, L G, L E, quæ tribus solidi Ψ Y contiguis R X, R Ψ, R N ostensa sunt æqualia et similia, eadem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata erunt; homologa utique homologis. Sed et tria tribus opposita, et æqualia sunt, et similia [i], et similiter inclinata [k]. Totum igitur A E solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo Ψ Y est æquale. Producantur D R, X Y, conveniantque inter se in puncto Ω; et per T ipsi D Ω parallela ducatur T Q; et producantur T Q, O D, et conveniant in V; compleanturque solida Ω Ψ, R I. Solidum igitur Ψ Ω, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, oppositum autem ipsi Ω Γ, est æquale solido Ψ Y, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, et oppositum ipsi Y Φ; in eâdem enim sunt basi R Ψ, et eâdem altitudine, et eorum stantes R Ω, R Y, T Q, T X;

[g] 18. hujus.

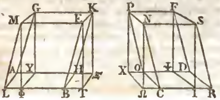
[h] Def. 6. hujus.

[i] Cor. 24. hujus.

[k] Cor. 25. hujus.

S Z,

Ξ Z, Ξ N, Ψ Γ, Ψ Φ in eiſdem ſunt rectis lineis Ω X, Z Φ [l]. [l] 29. hujus.
Sed ſolidum Ψ Y æquale eſt ſolido A E. Ergo et Ψ Ω ſolido A E eſt æquale. Præterea quoniam parallelogrammum R Y X T eſt æquale parallelogrammo Ω T [m], [m] 35. primi.
(etenim in eâdem eſt baſi R T, et in eiſdem parallelis R T, Ω X) et parallelogrammum R Y X T parallelogrammo C D æquale (quoniam utrumque eſt æquale ipſi A B) idcirco parallelogrammum Ω T æquale eſt parallelogrammo C D. Eſt autem aliud parallelogrammum D T. Eſt igitur ut C D baſis ad baſim D T, ita Ω T ad ipſam D T [n]. [n] 7. quinti.
Et quoniam ſolidum parallelepipedum C I ſecatur plano R F, planis oppoſitis parallelo; erit ut C D baſis ad baſim D T, ita ſolidum C F ad R I ſolidum [o]. Eâdem ratione, [o] 25. hujus.
quoniam ſolidum parallelepipedum Ω I ſecatur plano R Ψ, oppoſitis planis parallelo; ut Ω T baſis ad baſim D T, ita erit ſolidum Ω Ψ ad R I ſolidum [o]. Sed ut C D baſis ad baſim D T, ita baſis Ω T ad ipſam T D. Ut igitur ſolidum C F ad R I ſolidum, ita ſolidum Ω Ψ ad ſolidum R I. Quod cum utrumque ſolidorum C F, Ω Ψ ad ſolidum R I eandem habeat proportionem, ſolidum C F ſolido Ω Ψ eſt æquale [p]. Solidum autem Ω Ψ oſtenſum eſt [p] 9. quinti.
eſt æquale ſolido A E. Ergo et A E ipſi C F æquale erit.




Sed non ſint ſtantes A G, H K, B E, L M, C N, O P, D F, R S ad rectos angulos ipſis A B, C D baſibus. Dico rurſus ſolidum A E æquale eſſe ſolido C F. Ducantur a punctis K, E, G, M; P, F, N, S ad ſubjectum planum perpendiculares K Ξ, E T, G Y, M Φ; S I, F Ψ, N Ω, P X [q], quæ [q] 11. hujus.
plano in punctis Ξ, T, Y, Φ; Ψ, X, Ω, I occurrant; et jungantur Ξ T, Y Φ, Ξ Y, T Φ; X Ψ, X Ω, Ω I, Ψ I. Æquale igitur eſt K Φ ſolidum ſolido P I; in æqualibus enim ſunt baſibus K M, P S, et eâdem altitudine, et utriuſque ſtantes ad rectos angulos ſunt baſibus. Sed K Φ ſolidum ſolido A E eſt æquale [r]: ſiquidem in eâdem ſunt baſi, et eâdem [r] 29. hujus.
altitudine, et utriuſque ſtantes ſunt in eiſdem rectis

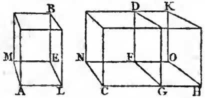

lineis,

lineis. Pari ratione solidum P I solido C F est æquale. Ergo et solidum A E solido C F æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, et eâdem altitudine, inter se sunt æqualia. *Q. E. D.*

[XXXII.] PROP. XXXII. THEOR.

*Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.*

Sint solida parallelepipeda A B, C D, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse, ut bases; hoc est, ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad C D

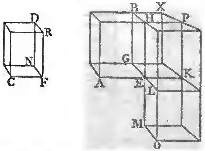



solidum. Applicetur enim ad rectam lineam F G parallelogrammo A E æquale F H, in angulo F G H ipsi G C N æquali. Et a basi F H eâdem altitudine ipsi C D solidum parallelepipedum G K compleatur. Solidum
p 31. hujus. igitur A B solido G K est æquale p; in æqualibus enim sunt basibus A E, E H, et eâdem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum C K plano D G secatur oppositis planis parallelo; erit ut H F basis ad
q 25. hujus. basim F C, ita solidum H D ad D C solidum q; atqui est basis quidem F H basi A E æqualis, solidum vero G K æquale solido A B. Est igitur et ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad solidum C D. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases. *Q. E. D.*

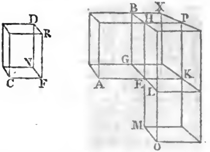
[XXXIII.] PROP. XXXIII. THEOR.

*Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicatâ proportione homologorum laterum.*

Sint similia solida parallelepipeda A B, C D. Latus autem A E homologum sit lateri C F. Dico solidum A B ad C D solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet A E ad C F. Producantur enim E K, E L, E M in directum ipsis A E, G E, H E; et ipsi quidem




dem C F æqualis ponatur E K, ipsi vero F N æqualis E L; et adhuc ipsi F R æqualis E M; et K L parallelogrammum, et K O solidum compleatur. Quoniam igitur duæ K E, E L duabus C F, F N æquales sunt; sed et angulus K E L angulo C F N æqualis; quia et angulus A E G ipsi C F N ob similitudinem solidorum A B, C D: erit et K L parallelogrammum simile et æquale parallelogrammo C N. Eadem ratione, et parallelogrammum K M æquale est et simile parallelogrammo C R; et adhuc parallelogrammum O E ipsi D F parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma solidi K O tribus parallelogrammis C D solidi æqualia et similia sunt. Eadem autem tria inter se similiter eisdem tribus inclinata esse, manifestum est. Cum ex ipsâ constructione figuræ, solidi K O plana illa tria K L, K M, O E solidi A B sint plana ipsa A G, A H, E B. Quæ quidem similiter inter se ac solidi C D tria illa C N, C R, D F inclinata sunt, propter solidorum similitudinem. Sed in utroque solido tria tribus oppositis æqualia sunt, et similia, et similiter inclinata[r]. [r] Cor. 24. hujus.
Totum igitur K O solidum æquale est et simile toti solido C D. Compleatur G K parallelogrammum; et a basibus quidem G K, K L parallelogrammis, altitudine vero eâdem ipsi A B, solida compleantur E X, L P. Et quoniam ob similitudinem solidorum A B, C D, est ut A E ad C F, ita E G ad F N; et E H ad F R; æqualis autem F C ipsi E K, et F N ipsi E L, et F R ipsi E M: erit ut A E ad E K, ita G E ad E L, et H E ad E M. Sed ut A E quidem ad E K, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K[s]; ut autem G E ad E L, ita G K[s] [s] 1. sexti.
ad K L; et ut H E ad E M, ita P E ad K M[s]. Ut igitur A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K, ita




G K ad K L, et P E ad K M. Sed ut A G quidem ad G K, ita A B ſolidum ad ſolidum E X [t]: ut autem G K ad K L, ita ſolidum E X ad P L ſolidum; et ut P E ad K M, ita P L ſolidum ad ſolidum K O. Et ut igitur ſolidum A B ad ſolidum E X, ita E X ad P L, et P L ad K O [u]. Si autem quatuor ſint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam [x]. Ergo et A B ſolidum ad ſolidum K O triplicatam habet proportionem ejus, quam A B ad E X. Sed ut A B ad E X, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K; et A E recta linea ad ipſam E K. Quare et A B ſolidum ad ſolidum K O triplicatam proportionem habebit ejus, quam A E habet ad E K. Æquale autem eſt ſolidum K O ſolido C D, et recta linea E K rectæ C F eſt æqualis. Ergo et A B ſolidum ad ſolidum C D triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipſius homologum A E habet ad C F homologum latus. *Q. E. D.*

[t] 32. hujus.
[u] 11. quinti.
[x] Def. 11. quinti.

*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum, quod ſit a primâ, ad ſolidum, quod a ſecundâ, ſimile, et ſimiliter deſcriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam.

* SCHOLION.

Quod in hâc propoſitione demonſtrandâ Euclides aſſumpſit, proportionum, quæ eædem inter ſe ſunt, earum triplicatas quoque inter ſe eaſdem eſſe; ut et ejus contrarium, proportiones inter ſe eaſdem eſſe, quarum triplicatæ

A———— B———— C——— D——
E——— F——— G—— H—

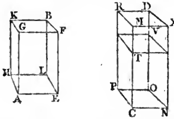
plicatæ ſunt eædem; operæ pretium facturi ſumus, ſi brevi demonſtratione utrumque confirmemus, cum ſine confirmatione temere aſſumi nonnulli judicarint. Primum dico, proportionum, quæ inter ſe eædem ſunt, eaſdem eſſe triplicatas. Sint quatuor A, B, C, D continue proportionales, et aliæ quatuor E, F, G, H continue proportionales. Ita proportio primæ A ad quartam D triplicata erit ejus, quam prima A habet ad ſecundam B; et proportio primæ E ad quartam H triplicata ejus, quam prima eadem E habet ad ſecundam F [f]. [f] Def. 11. quinti.
Sit autem A ad B, ut E ad F. Erit igitur et B ad C, ut F ad G; et C ad D ut G ad H. Quare ex æquo A ad D ut E ad H [z]. Proportionum igitur, quæ eædem inter ſe [z] 22. quinti.
ſunt, earum eædem erunt triplicatæ. Sed poſitis ut prius quatuor proportionalibus A, B, C, D, item aliis quatuor E, F, G, H; ſit A ad D, ut E ad H. Dico et A ad B ut E ad F. Non enim. A igitur vel major vel minor quam ad B in ratione E ad F. Sit major primum. Erit igitur et B major quam ad C ut F ad G; et C major quam ad D ut G ad H [a]. Minor itaque ali- [a] 13. quinti.
qua quam A habet ad B rationem eam, quam E ad F [b]; [b] Def. 7. quinti.
et B ad majorem quam C rationem eam, quam F ad G [c]. [c] 10. quinti.
Ex æquo igitur minor quam A ad majorem quam C rationem habet, quam E ad G. A igitur ad majorem quam C majorem rationem habet, quam E ad G. Omnino igitur ad ipſam C longe majorem. Pari ratione, cum major ſit A ad C, quam ut E ad G, et C major quam ad D ut G ad H, oſtendetur A longe major quam ad D ut E ad H. Quod eſt abſurdum; cum A ſit ad D, ut E ad H. Non igitur minor quam A habebit ad B rationem eam, quam E ad F. Eodemque modo oſtendetur neque major. Eſt igitur A ad B, ut E ad F. Proportiones igitur, quarum triplicatæ ſunt eædem, inter ſe eædem erunt.

PROP.

[XXXIV.] PROP. XXXIV. THEOR.

*Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases et altitudines, ea inter se sunt æqualia.*

Sint æqualia solida parallelepipeda A B, C D. Dico ipsorum bases et altitudines reciprocari, hoc est, ut E H basis ad basim N P, ita esse altitudinem solidi C D ad solidi A B altitudinem. Sint enim primo stantes A G, E F, L B, H K; C M, N X, O D, P R ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut E H basis ad basim N P, ita esse C M ad A G.



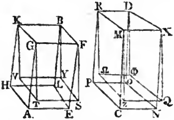
Capiatur enim in C M ipsi A G æqualis C T; et a basi quidem N P, altitudine autem C T, solidum parallelepipedum V C compleatur. Quoniam igitur solidum A B solido C D est æquale, aliud autem aliquod est V C, et [e 7. quinti.] æqualia ad idem eandem habent proportionem[e]; erit ut A B solidum ad solidum C V, ita C D solidum ad solidum C V. Sed ut A B solidum ad solidum C V, ita basis E H [d 32. hujus.] ad N P basim[d]; æque alta enim sunt A B, C V solida. Ut autem solidum C D ad ipsum C V, ita M P basis ad [e 25. hujus.] [f 1. sexti.] basim P T[e], et M C ad C T[f]. Et igitur ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Est autem C T æqualis A G. Ergo et ut E H basis ad basim N P, ita M C ad A G. Quare solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocantur.

Rursus solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocentur: sitque ut E H basis ad basim N P, ita solidi C D altitudo ad altitudinem solidi A B. Dico solidum A B solido C D æquale esse. Ponatur ipsi A G æqualis rursus C T, et similiter solidum C V compleatur. Itaque quoniam est ut E H basis ad basim N P, ita M C ad ipsam A G; æqualis autem est A G ipsi C T: erit ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. Sed ut [g 32. hujus.] basis E H ad N P basim, ita A B solidum ad solidum V C[g]; æque

æque alta enim sunt solida A B, C V. Ut autem M C ad C T, ita et M P basis ad basim P T, et solidum C D ad C V solidum[h]. Et igitur ut solidum A B ad solidum C V, ita C D solidum ad solidum C V[i]. Quod cum utrumque solidorum A B, C D ad ipsum C V eandem proportionem habeat; erit A B solidum solido C D æquale[k]. *Q. E. D.*

[h] 1. sexti, et 25. hujus.
[i] 11. quinti.
[k] 9. quinti.

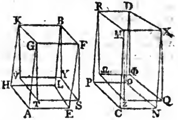
Non sint autem stantes F E, B L, G A, K H; X N, D O, M C, R P ad rectos angulos basibus solidorum. Dico et




sic, æqualibus existentibus solidis A B, C D, bases et altitudines reciprocari. Scilicet ut E H basis ad basim N P, ita esse altitudinem solidi C D ad solidi A B altitudinem. Ducantur enim a punctis F, G, B, K; X, M, D, R ad plana basium E H, N P perpendiculares, quæ planis in punctis S, T, Y, V; Q, Z, Ω, Φ occurrant; et compleantur solida F V, X Ω. Itaque solidum A B solido B T est æquale; in eâdem namque sunt basi F K, et eâdem altitudine, stantes autem non sunt in eisdem rectis lineis[l]. Pari ratione solidum D C est æquale solido D Z. Erit igitur et solidum B T solido D Z æquale. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases et altitudines reciprocantur[m]. Est igitur ut F K basis ad basim X R, ita solidi D Z altitudo ad altitudinem solidi B T. Atqui est basis quidem F K basi E H æqualis, basis vero X R æqualis basi N P[n]. Quare ut E H basis ad basim N P, ita est altitudo solidi D Z ad solidi B T altitudinem. Eædem autem sunt altitudines solidorum D Z, D C, itemque solidorum B T, B A. Est igitur ut E H basis ad basim N P, ita solidi D C altitudo ad altitudinem solidi A B. Ergo solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et altitudines reciprocantur.

Rursus solidorum parallelepipedorum A B, C D bases et

[l] 30. hujus.
[m] Ex ante demonstratis.
[n] 24. hujus.



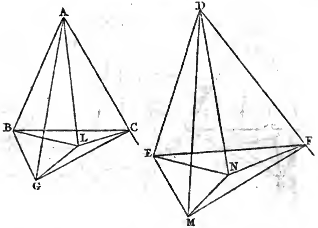

et altitudines reciprocentur; fitque ut E H bafis ad bafim N P, ita altitudo folidi C D ad folidi A B altitudinem. Dico folidum A B folido C D æquale effe. Iifdem namque conftructis, quoniam ut E H bafis ad bafim N P, ita folidi C D altitudo ad altitudinem folidi A B; et bafis quidem E H eft æqualis bafi F K; N P vero ipfi X R: erit ut F K bafis ad bafim X R, ita altitudo folidi C D ad folidi A B altitudinem. Eædem autem funt altitudines folidorum A B, B T; necnon ipforum C D, D Z. Eft igitur ut F K bafis ad bafim X R, ita folidi D Z altitudo ad altitudinem folidi B T. Quare folidorum B T, D Z parallelepipedorum bafes et altitudines reciprocantur. Quorum autem folidorum parallelepipedorum altitudines funt ad rectos angulos bafibus ipforum, et bafes et altitudines reciprocantur; ea inter fe funt æqualia. Ergo B T folidum folido D Z eft æquale. Sed folidum quidem B T æquale eft folido B A, etenim in eâdem funt bafi F K, et eâdem altitudine, ftantes autem non funt in eifdem rectis lineis. Pari autem ratione folidum D Z eft æquale folido D C. Ergo et folidum A B folido C D eft æquale. *Q. E. D.*

[XXXV.]

## PROP. XXXV. THEOR.

*Si fint duo anguli plani æquales, quorum verticibus fublimes rectæ lineæ infiftant, quæ cum rectis lineis a principio pofitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in fublimibus autem fumantur quævis puncta, atque ab ipfis ad plana, in quibus funt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis, quæ a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum fublimibus æquales angulos continebunt.*

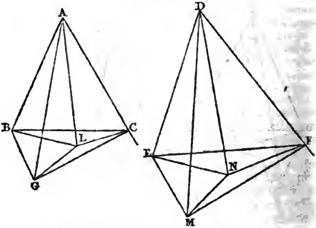
Sint duo anguli rectilinei æquales B A C, E D F; et a punctis A, D fublimes rectæ lineæ A G, D M conftituantur, quæ




quæ cum rectis lineis a principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero M D F angulo G A C æqualem; et fumantur in ipsis A G, D M quævis puncta G, M, a quibus ad plana per B A C, E D F ducantur perpendiculares G L, M N, occurrentes planis in punctis L, N; et L A, N D jungantur. Dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. A puncto enim L ad rectas A B, A C deducantur ad perpendiculum L B, L C. A puncto quoque N in rectas D E, D F deducantur ad perpendiculum N E, N F. Et jungantur G B, G C; M E, M F. Jungantur quoque B C, E F. Ita rectæ G B, G C rectis A B, A C, necnon M E, M F rectis D E, D F, ad perpendiculum erunt [i]. In triangulis igitur A B G, D E M æquales sunt anguli A B G, D E M; rectus enim uterque. Angulus autem B A G angulo E D M æqualis [k]. Reliquus igitur A G B reliquo D M E æqualis, et triangulum A B G triangulo D E M simile [l]. Quare A B ad D E, et B G ad E M, ut A G ad D M. Pari ratione, propter angulos G C A, M F D rectos, angulosque C A G, F D M inter se æquales, simile erit triangulum A C G triangulo D F M; et A C ad D F, et C G ad F M, ut A G ad D M. Jam vero cum sit A B ad A G, ut D E ad D M, et A G ad A C, ut D M ad D F; ex æquo erit A B ad A C, ut D E ad D F. Angulus autem B A C angulo E D F æqualis [k]. Triangula igitur

B A C,

i Cor. 1. 11. hujus.
k ex hyp.
l 4. sexti.




B A C, E D F habent angulum angulo æqualem, et latera circa æquales angulos proportionalia. Æquiangula igitur sunt triangula B A C, E D F, et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur[m]. Angulus igitur A B C angulo D E F est æqualis, et angulus A C B angulo D F E. Præterea latus B C erit ad latus E F, ut A B ad D E, et A C ad D F[n]. Rursum cum æquales sint anguli A B L, D E N, rectus enim uterque[o], æquales item A B C, D E F, et reliquus C B L reliquo F E N æqualis erit. Pari ratione propter angulos A C L, D F N rectos, angulosque A C B, D F E æquales, anguli B C L, E F N inter se æquales erunt. Æquiangula igitur sunt triangula B L C, E N F. Latera igitur circa æquales angulos proportionalia habent[n]. Quare B L est ad E N, ut B C ad E F. Sed B C est ad E F, ut A B ad D E, et A B ad D E, ut B G ad E M. Est igitur B L ad E N, ut B G ad E M[p]. Sed cum rectæ G L, M N ad perpendiculum sint planis B A C, E D F, in quibus sunt rectæ L B, N E, recti sunt anguli G L B, M N E[q]. Duo igitur triangula G L B, M N E angulum angulo æqualem habent (rectum utique G L B recto M N E), et circa alios G B L, M E N latera proportionalia, nempe B L ad E N, ut B G ad E M; reliquos autem angulos B G L, E M N, rectis singulatim minores. Æquiangula igitur sunt triangula G L B, M N E, et æquales habent angulos, circa quos latera sunt proportionalia[r]; angulum scilicet G B L angulo M E N, et reliquum

[m] 6. sexti.
[n] 4. sexti.
[o] Per construct.
[p] 11. quinti.
[q] Def. 3. hujus.
[r] 7. sexti.

reliquum B G L reliquo E M N [s]. Similia igitur ſunt triangula G L B, M N E, et G B eſt ad M E, ut G L ad M N [t]. Sed G B eſt ad M E, ut A G ad D M (id enim initio oſtenſum.) Quare G L eſt ad M N, ut A G ad D M [u]. Sed cum rectæ G L, M N ad perpendiculum ſint planis B A C, E D F, in quibus ſunt rectæ L A, N D, recti ſunt anguli G L A, M N D. Duo igitur triangula G L A, M N D angulum angulo æqualem habent (rectum utique G L A recto M N D) et circa alios angulos A G L, D M N latera proportionalia; nempe A G ad D M, ut G L ad M N; angulos autem reliquos G A L, M D N rectis ſingulatim minores. Æquiangula igitur ſunt triangula G L A, M N D, et æquales habent angulos, circa quos latera ſunt proportionalia [x]. Nempe angulum A G L angulo D M N, et reliquum G A L reliquo M D N æqualem. Anguli igitur G A L, M D N ſunt inter ſe æquales. Si ſint igitur duo anguli plani &c. *Q. E. D.*

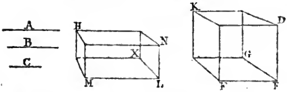
[s] 7. ſexti. [t] 4. ſexti. [u] 11. quinti.

*Cor.* Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis a principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quæ ab ipſis ad plana, in quibus ſunt primi anguli, ducantur, inter ſe æquales eſſe. Nam triangulorum ſimilium G A L, M D N ſi latera homologa G A, M D inter ſe æqualia ſint; homologa etiam G L, M N erunt inter ſe æqualia.

## PROP. XXXVI. THEOR. [XXXVI.]

*Si tres rectæ lineæ proportionales ſint; ſolidum parallelepipedum, quod a tribus ſit, æquale eſt ſolido parallelepipedo, quod ſit a media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.*

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; ſit ſcilicet ut A ad B, ita B ad C. Dico ſolidum, quod ſit ex ipſis A, B, C, æquale eſſe ſolido, quod ſit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur ſolidus angulus ad E, contentus tribus angulis planis D E G, G E F, F E D; et ipſi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipſarum D E, G E, E F; et ſolidum parallelepipedum E K compleatur. Rectæ autem A ponatur æqualis L M; et ad rectam lineam L M, et ad punctum in ipſa L, conſtituatur angulo ſolido ad E æqualis angulus, contentus tribus planis



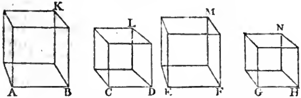

x 26. hujus. planis N L X, X L M, M L N x; et ponatur ipsi quidem B æqualis L N, ipsi vero C æqualis L X. Quoniam igitur est ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi L M, et B unicuique ipsarum L N, E F, E G, E D, et C ipsi L X; erit ut L M ad E F, ita G E ad L X; et circum æquales angulos M L X, G E F latera sunt reciproca. Ergo M X parallelogrammum parallelogrammo
y 14. sexti. G F est æquale y. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt G E F, X L M, et in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur L N, E D æquales inter se, et cum rectis lineis a principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares, quæ a punctis N, D ad plana per X L M, G E F ducuntur, inter
z Cor. 35. hujus. se æquales z. Ergo solida L H, E K eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter se sunt æ-
a 31. hujus. qualia a. Ergo solidum H L æquale est solido E K. Atqui est solidum quidem H L, quod fit a tribus A, B, C, solidum vero E K, quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod fit a tribus, æquale est solido parallelepipedo, quod fit &c. *Q. E. D.*

[XXXVII.] PROP. XXXVII. THEOR.

*Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; et quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.*

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, E F, G H, sit scilicet ut A B ad C D, ita E F ad G H, et describantur ab ipsis A B, C D, E F, G H similia et similiter posita solida parallelepipeda K A, L C, M E, N G. Dico ut K A ad L C, ita esse M E ad N G. Quoniam enim solidum parallelepipedum K A simile est ipsi L C, habebit

K A



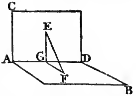

K A ad L C triplicatam proportionem ejus, quam A B habet ad C D [b]. Eâdem ratione, et solidum M E ad ipsum N G triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet E F ad G H [b]. Atqui est ut A B ad C D, ita E F ad G H. Ut igitur A K ad L C, ita M E ad N G. [b] 33. hujus.

Sed sit ut solidum A K ad solidum L C, ita M E solidum ad solidum N G. Dico, ut recta linea A B ad rectam C D, ita esse rectam E F ad ipsam G H. Quoniam enim rursus A K ad L C triplicatam proportionem habet ejus, quam A B habet ad C D [b]; habet autem et M E ad N G triplicatam proportionem ejus, quam E F ad G H; atque ut A K ad L C, ita M E ad N G: erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. *Q. E. D.*

## PROP. XXXVIII. THEOR. XXXVIII.]

*Si planum ad planum rectum sit; et ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.*

Planum nempe C D ad planum A B rectum sit, communis autem eorum sectio sit A D, et in ipso C D plano, quodvis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quæ a puncto E ad planum A B ducitur, cadere in ipsam A D. Non enim; sed, si fieri potest, cadat extra, ut E F; et plano




A B in puncto F occurrat: a puncto autem F ad D A in plano A B perpendicularis ducatur F G, quæ quidem et plano C D ad rectos angulos erit [c]; et E G jungatur. Quoniam igitur recta F G plano C D est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea E G, quæ est in eodem [c] Def. 4. hujus.

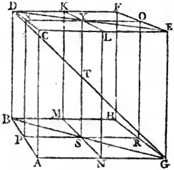
[d] Def. 3. hujus. C D plano: erit angulus F G E rectus[d]. Sed et E F plano A B ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus E F G. Quare trianguli E F G duo anguli duobus

[e] 17. primi. rectis sunt æquales; quod est absurdum[e]. Non igitur a puncto E ad A B planum perpendicularis ducta extra rectam lineam D A cadet. Ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. *Q. E. D.*

[XXXIX.] PROP. XXXIX. THEOR.

*Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio, et solidi parallelepipedi diagonalis, sese bifariam secabunt.*

In solido enim parallelepipedo A F, oppositorum planorum C F, A H latera bifariam secentur in punctis




K, L, M, N, X, O, P, R. Et jungantur K L, M N; K M, L N; X O, P R; X P, O R. Æquales sunt rectæ D K, C L, æqualium utique D F, C E dimidiæ. Sed et parallelæ. Parallelæ igitur et æquales K L, D C, quæ illas

[f] 33. primi. D K, C L conjungunt[f]. Simili modo ostendentur M N, B A parallelæ et æquales. Jam vero cum K L parallela sit ipsi D C, erit et B A, quæ eidem D C est parallela, pa-

[g] 9. hujus. rallela ipsi K L[g]. Sed eadem B A ipsi M N est parallela. Quare K L, M N inter se sunt parallelæ. Quare et rectæ K M, L N, quæ puncta K, M; L, N, in parallelis K L, M N sumpta, conjungunt, in eodem sunt, in quo ipsæ

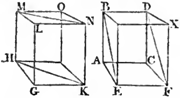
[h] 7. hujus. parallelæ, plano[h]. Plana igitur est figura K M N L. Simili modo plana ostendetur figura X P O R. Oppositorum

sitorum igitur planorum C F, A H lateribus in punctis K, L, M, N, X, O, P, R bifariam divisis, per sectiones plana ducuntur K N, X R. Communis planorum sectio sit Y S, et solidi parallelepipedi diagonalis sit D G. Dico Y S, D G sese bifariam secare. Jungantur enim D Y, Y E, B S, S G. Quoniam igitur D X parallela est ipsi O E, alterni anguli D X Y, Y O E inter se æquales sunt[h]. Et [h] 29. primi.
quoniam D X quidem est æqualis O E, X Y vero ipsi Y O, et angulos æquales continent; erit basis D Y æqualis basi Y E; et triangulum D X Y triangulo Y O E, et reliqui anguli reliquis angulis æquales[i]. Angulus igitur [i] 4. primi.
X Y D est æqualis angulo O Y E, et ob id recta linea est D Y E[k], et D Y, Y E sunt æquales. Eâdem ratione, et [k] 14. primi.
B S G recta est, et B S æqualis S G. Et quoniam C A ipsi D B æqualis est et parallela, et eadem C A æqualis et parallela ipsi E G; erit et D B ipsi E G æqualis et parallela; et ipsas conjungunt rectæ lineæ D E, G B: parallela igitur est D E ipsi B G[l]. Et sumpta sunt in utraque ip- [l] 33. primi.
sarum quævis puncta D, Y, G, S, et junctæ sunt D G, Y S. Ergo D G, Y S in uno sunt plano[m]; neque tamen [m] 7. hujus.
inter se parallelæ; nimirum cum Y S (ipsi K M parallela) parallela erit D B, cui non est parallela D G. Rectæ igitur D G, Y S, quæ in eodem plano non sunt parallelæ, sibi invicem in puncto aliquo occurrent. Occurrant in T. Dico igitur in T bifariam dividi; hoc est, Y T ipsi T S, D T vero ipsi T G æqualem esse. Nam cum D E sit parallela B G, erit et E D T angulus angulo B G T æqualis, alterni enim sunt[h]. Est autem et D T Y angulus æqualis ipsi G T S[n]. Duo igitur sunt triangula D T Y, G T S duos [n] 15. primi.
angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet D Y ipsi G S: dimidia enim sunt ipsorum D E, B G. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt[o]. Quare D T quidem est æ- [o] 26. primi.
qualis T G, Y T vero ipsi T S. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. *Q. E. D.*

[XL.] PROP. XL. THEOR.

*Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.*

Sint prismata æque alta A B C D E F, G H K L M N. Et unum quidem basim habeat parallelogrammum A F,




alterum vero G H K triangulum, et duplum sit A F parallelogrammum trianguli G H K. Dico prisma A B C D E F prismati G H K L M N æquale esse. Compleantur enim A X, G O solida. Et quoniam parallelogrammum A F trianguli G H K est duplum; est autem et H K parallelo-
[a 41. primi.] grammum duplum trianguli G H K [a]: erit A F parallelogrammum parallelogrammo H K æquale. Quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda,
[r 31. hujus.] et eâdem altitudine, inter se æqualia sunt [r]. Æquale igitur A X solidum solido G O. Atque est solidi quidem A X dimidium A B C D E F prisma, solidi vero G O di-
[s 28. hujus.] midium est prisma G H K L M N [s]. Ergo A B C D E F prisma prismati G H K L M N est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. *Q. E. D.*

EUCLIDIS

# EUCLIDIS

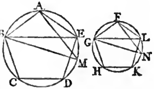
## ELEMENTORUM

## LIBER DUODECIMUS.

### PROPOSITIO I. THEOREMA. [I.]

*Similia polygona circulis inscripta inter se sunt, ut diametrorum quadrata.*

SINT circuli A B C D E, F G H K L, et in ipsis similia polygona A B C D E, F G H K L; diametri autem circulorum sint B M, G N. Dico ut quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita esse A B C D E polygonum ad polygonum F G H K L.




Jungantur enim B E, A M, G L, F N. Et quoniam polygonum A B C D E simile est polygono F G H K L; idcirco B A E angulus angulo G F L est æqualis, atque ut B A ad A E, ita est G F ad F L. Duo igitur triangula sunt B A E, G F L, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum B A E angulo G F L; circa æquales autem angulos latera proportionalia. Quare triangulum A B E triangulo F G L æquiangulum est [a]; ac propterea angulus A E B æqualis [a] 6. sexti.
est angulo F L G. Sed angulus quidem A E B angulo A M B est æqualis [b]; in eâdem enim circumferentiâ [b] 21. tertii.
consistunt. Angulus autem F L G æqualis est angulo F N G [b]. Ergo et A M B angulus est æqualis angulo F N G. Est autem et rectus angulus B A M æqualis recto G F N [c]. Quare et reliquus trianguli A M B angulus re- [c] 31. tertii.
liquo trianguli F G N æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum A M B triangulo F G N. Ergo ut B M ad G N, ita B A ad G F [d]. Sed proportionis quidem [d] 4. sexti.
B M ad G N duplicata est proportio quadrati ex B M ad quadratum ex G N; proportionis vero B A ad G F du-

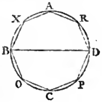
 plicata

plicata est proportio A B C D E polygoni ad polygonum
[e] 20. sexti. F G H K L [e]: est igitur ut quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita polygonum A B C D E ad F G H K L polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

## [II.] PROP. II. THEOR.

*Circuli inter se sunt, ut diametrorum quadrata.*

Sint circuli A B C D, E F G H, diametri autem ipsorum sint B D, F H. Dico ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita esse circulum A B C D ad E F G H circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulus A B C D, vel ad spatium aliquod minus circulo E F G H, vel ad majus. Sit primum ad minus, quod sit S. Et in circulo E F G H describatur quadratum E F G H. Itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli E F G H; quoniam si per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium E F G H †. Descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. Ergo quadratum E F G H majus est dimidio circuli E F G H. Secentur bifariam circumferentiæ E F, F G, G H, H E in punctis K, L, M, N: et E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E jungantur. Unumquodque igitur triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit: quoniam si per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas E F, F G,





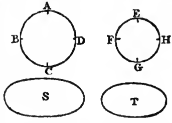





† *Nimirum quadratum circulo circumscriptum quadrato ex diametro circuli est æquale. Id enim ex constructione septimæ quarti manifestum est. Quadratum igitur circulo* E F G H *circumscriptum quadrato ex* F H *est æquale.*
[f] 31. tertii. *Sed, propter angulum* F E H *in semicirculo rectum* [f], *quadratum ex* F H *qua-*
[g] 47. primi. *dratis duobus ex* F E, E H, *simul sumptis, est æquale* [g]. *Et cum æquales inter se sint rectæ* F E, E H *(quadrati utique inscripti latera) duo ex* F E, E H *quadrata, quadrati ex alterutrâ, id est, inscripti quadrati, duplo sunt æqualia. Quadratum igitur ex diametro* F H, *ac proinde quadratum circulo circumscriptum, inscripti duplum est. Et inscriptum vicissim dimidium circumscripti.*

G H,

G H, H E, compleamus; erit unumquodque triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt [f]. Sed ſegmentum minus [f] 41. primi.
eſt parallelogrammo. Quare unumquodque triangulorum E K F, F L G, G M H, H N E majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus E F G H ipſum s ſpatium ſuperat. Etenim duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod relinquitur, rurſus majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua, quæ minori magnitudine expoſitâ ſit minor [g]. Itaque relicta [g] 1. decimi.
ſint ſegmenta circuli E F G H in rectis lineis E K, K F, F L, L G, G M, M H, H N, N E, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus E F G H ipſum s ſpatium ſuperat. Ergo reliquum E K F L G M H N polygonum majus erit ſpatio s. Deſcribatur etiam in circulo A B C D, polygono E K F L G M H N ſimile polygonum A X B O C P D R. Eſt igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum [h]. Sed et ut quadratum ex B D ad quadratum [h] 1. hujus.
ex F H, ita A B C D circulus ad ſpatium s. Ergo et ut circulus A B C D ad ſpatium s, ita polygonum A X B O C P D R ad E K F L G M H N polygonum [i]. [i] 11. quinti.
Major autem eſt circulus A B C D eo, quod in ipſo eſt polygono. Quare et ſpatium s majus eſt polygono E K F L G M H N [k]. Sed et minus [l]. Quod fieri non [k] 14. quinti.
poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex B D ad [l] ex hyp.
quadratum ex F H, ita A B C D circulus ad ſpatium aliquod minus circulo E F G H. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita circulum E F G H ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D. Dico igitur neque eſſe ut



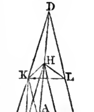

quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita circulum

A B C D ad aliquod ſpatium majus circulo E F G H. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. Erit igitur invertendo ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita ſpatium S ad A B C D circulum. Sed quoniam S majus eſt E F G H circulo; erit ut ſpatium S ad A B C D circulum, ita circulus E F G H ad aliquod ſpatium minus
m 14. quinti. circulo A B C D[m]. Ergo et ut quadratum ex F H ad quadratum ex B D, ita E F G H circulus ad aliquod ſpatium minus circulo A B C D, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita eſt circulus A B C D ad ſpatium aliquod majus E F G H circulo. Oſtenſum autem eſt neque ad minus. Quare ut quadratum ex B D ad quadratum ex F H, ita erit A B C D circulus ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt, ut diametrorum quadrata. *Q. E. D.*

[III.] PROP. III. THEOR.

*Omnis pyramis, triangularem habens baſim, dividitur in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, quæ triangulares baſes habent, ſimileſque toti; et in duo priſmata æqualia; quæ quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt majora.*

Sit pyramis, cujus baſis quidem A B C triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem A B C D dividi in duas pyramides æquales et ſimiles inter ſe, triangulares baſes habentes, et ſimiles toti; et in duo priſmata æqualia; et duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora. Secentur enim A B, B C, C A, A D, D B, D C bifariam in punctis E, F, G, H, K, L; et E H, E G, G H, H K, K L, L H, E K, K F, F G jungantur. Quoniam igitur A E quidem eſt æqualis E B, A H vero ipſi H D; erit E H ipſi
n 2. ſexti. D B parallela[n]. Eâdem ratione et H K eſt parallela ipſi A B. Parallelogram-

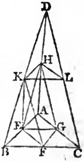



o 34. primi. mum igitur eſt H E B K. Quare H K eſt æqualis E B[o]. Sed E B ipſi A E eſt æqualis. Ergo et A E ipſi H K æqualis erit. Eſt autem et A H æqualis H D. Duæ igitur A E, A H duabus K H, H D æquales ſunt, altera
p 29. primi. alteri, et angulus E A H æqualis angulo K H D[p]; baſis igitur

igitur E H basi K D est æqualis [q]. Quare triangulum A E H æquale est et simile triangulo H K D. Eadem ratione et triangulum A H G triangulo H L D æquale est et simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes E H, H G duabus rectis lineis sese tangentibus K D, D L parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos continebunt [r]. Ergo angulus E H G est æqualis angulo K D L. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ E H, H G duabus K D, D L æquales sunt, altera alteri, et angulus E H G æqualis angulo K D L; erit basis E G basi K L æqualis [s]: æquale igitur est et simile triangulum E H G triangulo K D L. Eadem ratione et A E G triangulum est æquale et simile triangulo H K L. Planum autem D B A, seu D K H, planis parallelis H K L, A B C similiter est inclinatum. Et eisdem planis parallelis planum D C A, seu D L H, similiter est inclinatum. Eisdem etiam planum D B C, seu D K L, similiter est inclinatum. Quare pyramis, cujus basis quidem est A E G triangulum, vertex autem punctum H, æqualis et similis est pyramidi, cujus basis est triangulum H K L, et vertex D punctum. Simili modo ostendetur pyramis, cujus basis quidem triangulum A B C, vertex autem punctum D, similis pyramidi, cujus basis triangulum H K L, et vertex punctum D. Planis enim numero æqualibus et similibus et similiter inclinatis continentur. Sed pyramis, cujus basis quidem H K L triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum A E G, et vertex H punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum A B C, et vertex punctum D, similis est pyramidi, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H. Utraque igitur ipsarum A E G H, H K L D pyramidum similis est toti pyramidi A B C D. Et quoniam B F est æqualis F C, erit E B F G parallelogrammum duplum trianguli G F C [t]. Et quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia [u]. Ergo prisma, contentum duobus triangulis B K F, E H G, et tribus parallelogrammis E B F G, E B K H, K H G F, est æquale prismati, quod duobus triangulis G F C, H K L, et tribus parallelogrammis K F C L, L C G H, H K F G continetur. Et manifestum est utrumque ipsorum prismatum, et cujus basis est E B F G parallelogrammum, opposita autem ipsi H K recta linea, et cujus basis est G F C triangulum,

[q] 4. primi.
[r] 10. undecimi.
[s] 4. primi.
[t] 41. primi.
[u] 40. undecimi.

gulum, et oppositum ipsi triangulum K L H, majus esse utrâque pyramidum, quarum bases quidem A E G, H K L triangula, vertices autem puncta H, D: quoniam si jungamus E F, E H rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est E B F G parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea K H, majus est pyramide, cujus basis E B F triangulum, vertex autem punctum K. Sed pyramis, cujus basis triangulum E B F, et vertex K punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H [u]; æqualibus enim et similibus planis continentur, et similiter inclinatis. Quare




[u] Def. 10. undecimi.

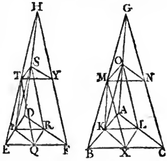
et prisma, cujus basis parallelogrammum E B F G, opposita autem ipsi recta linea H K, majus est pyramide, cujus basis A E G triangulum, et vertex punctum H. Prisma vero, cujus basis parallelogrammum E B F G, et opposita ipsi recta linea H K, est æquale prismati, cujus basis G F C triangulum, et ipsi oppositum triangulum H K L: et pyramis, cujus basis triangulum A E G, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis H K L triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo prismata, de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus, quarum bases triangula A E G, H K L, vertices autem H, D puncta. Tota igitur pyramis, cujus basis A B C triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, et similes inter se, et similes toti: et in duo prismata æqualia: suntque duo prismata æqualia dimidio totius pyramidis majora. *Q. E. D.*

## [IV.] PROP. IV. THEOR.

*Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, et in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, et in duo prismata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita et in unâ pyramide prismata omnia ad prismata omnia in alterâ pyramide multitudine æqualia.*

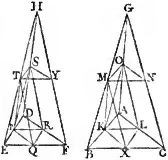
Sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant A B C, D E F, vertices autem sint puncta G, H; et

et dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimileſque toti, et in duo priſmata æqualia; et factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur: atque hoc ſemper fiat. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia, quæ ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia, quæ in pyramide DEFH, multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem




eſt æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit XL ipſi AB parallela[x], et triangulum ABC triangulo LXC ſimile.[x] 2. ſexti. Eâdem ratione et triangulum DEF ſimile eſt triangulo RQF. Et quoniam BC quidem eſt dupla CX, EF vero dupla ipſius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. Et deſcripta ſunt ab ipſis BC, CX ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea ABC, LXC; ab ipſis vero EF, FQ ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea DEF, RQF. Eſt igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum[y]; et permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. [y] 22. ſexti. Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita priſma, cujus baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN, ad priſma, cujus baſis RQF triangulum, et oppoſitum ipſi STY[z]. Ut[z] igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita priſma, cujus baſis eſt triangulum LXC, oppoſitum autem ipſi OMN, ad priſma, cujus baſis RQF triangulum, et oppoſitum ipſi STY[a]. [z] 28. et 32. undecimi. Et quoniam duo priſmata, quæ in[a] pyramide ABCG inter ſe æqualia ſunt, ſed et quæ in pyramide DEFH priſmata inter ſe ſunt æqualia; erit ut priſma, cujus baſis parallelogrammum KLXB, oppoſita vero ipſi recta linea MO, ad priſma, cujus baſis LXC triangulum, et oppoſitum ipſi OMN, ita priſma, cujus baſis parallelogrammum EPRQ, et oppoſita recta linea ST, ad priſma, cujus baſis RQF triangulum, oppoſitum vero ipſi STY. [a] 11. quinti. Quare componendo, ut priſmata KBXLMO, LXCMNO ad priſma LXCMNO, ita

ita prismata P E Q R S T, R Q F S T Y ad prisma R Q F S T Y. Et permutando, ut prismata K B X L M O, L X C O M N ad prismata P E Q R S T, R Q F S T Y, ita prisma L X C M N O ad prisma R Q F S T Y. Ut autem prisma L X C M N O ad prisma R Q F S T Y, ita ostensa est basis L X C ad R Q F basim, et A B C basis ad basim D E F. Ergo et ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita quæ in pyra-



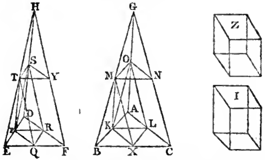

mide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H. Similiter autem, et si factas pyramides dividamus eodem modo velut O M N G, S T Y H, erit ut O M N basis ad basim S T Y, ita quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide S T Y H. Sed ut O M N basis ad basim S T Y, ita basis A B C ad D E F basim. Et ut igitur A B C basis ad basim D E F, ita quæ in pyramide A B C G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide D E F H; et quæ in pyramide O M N G duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide S T Y H; et quatuor ad quatuor. Eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum A K L O, et D P R S, et omnium simpliciter multitudine æqualium. *Q. E. D.*

[V.] PROP. V. THEOR.

*Pyramides, quæ eâdem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.*

Sint eâdem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F, vertices autem puncta G, H. Dico ut A B C basis ad basim D E F, sic esse pyramidem A B C G ad D E F H pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut A B C basis ad basim D E F, sic A B C G pyramis, vel ad solidum minus pyramide D E F H, vel ad majus. Sit primum ad solidum minus, sitque Z. Et dividatur pyramis D E F H in duas pyramides æquales inter se, et similes toti, et in duo prismata æqualia. Sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora[a]. Et rursus

[a] 3. hujus.




ſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat, quoad ſumantur quædam pyramides a pyramide D E F H, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis D E F H ſolidum Z ſuperat. Itaque ſumantur, et ſint exempli cauſâ, pyramides D P R S, S T Y H. Erunt igitur reliqua in pyramide D E F H priſmata ſolido Z majora. Dividatur etiam A B C G pyramis in totidem partes ſimiles pyramidi D E F H. Ergo ut A B C baſis ad baſim D E F, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata, quæ in pyramide D E F H[b]. Sed ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramis A B C G ad ſolidum Z. Et igitur ut A B C G pyramis ad ſolidum Z, ita quæ in pyramide A B C G priſmata ad priſmata, quæ in pyramide D E F H. Major autem eſt pyramis A B C G priſmatibus, quæ in ipſâ ſunt. Ergo et ſolidum Z priſmatibus, quæ ſunt in pyramide D E F H, eſt majus. Sed et minus[c]; quod fieri non poteſt. Non igitur ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt pyramis A B C G ad ſolidum aliquod minus pyramide D E F H. Similiter oſtendemus neque ut D E F baſis ad baſim A B C, ita eſſe pyramidem D E F H ad ſolidum aliquod pyramide A B C G minus. Dico igitur neque eſſe ut A B C baſis ad baſim D E F, ita A B C G pyramidem ad aliquod ſolidum majus pyramide D E F H. Si enim fieri poteſt, ſit ad majus, videlicet ad ſolidum I. Erit igitur invertendo ut D E F baſis ad baſim A B C, ita ſolidum I ad A B C G pyramidem. Cum autem ſolidum I majus eſt pyramide E D F H, erit ut ſolidum I ad A B C G pyramidem, ita D E F H pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide A B C G. Et ut igitur D E F baſis ad baſim A B C, ita pyramis D E F H ad

ſolidum

b 4. hujus.

c ex prius demonſtratis.

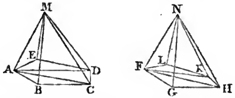
ſolidum aliquod pyramide A B C G minus, quod eſt abſurdum, ut modo oſtenſum eſt. Non igitur ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt A B C G pyramis ad ſolidum aliquod majus pyramide D E F H. Oſtenſum autem eſt, neque ad minus. Quare ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt pyramis A B C G ad D E F H pyramidem. Pyramides igitur, quæ eâdem ſunt altitudine, et triangulares baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes. *Q. E. D.*

[VI.]

## PROP. VI. THEOR.

*Pyramides, quæ eâdem ſunt altitudine, et polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.*

Sint eâdem altitudine pyramides, quæ polygonas baſes habeant A B C D E, F G H K L; vertices autem M, N puncta. Dico ut A B C D E baſis ad baſim F G H K L,




ita eſſe A B C D E M pyramidem ad pyramidem F G H K L N. Dividatur enim baſis quidem A B C D E in triangula A B C, A C D, A D E; baſis vero F G H K L dividatur in triangula F G H, F H K, F K L. Et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides, quæ a principio. Quoniam igitur eſt ut triangulum A B C ad triangulum A C D, ita A B C M pyramis ad pyramidem A C D M [c]: et componendo ut A B C D trapezium ad triangulum A C D, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A C D M. Sed et ut A C D triangulum ad A D E, ita pyramis A C D M ad A D E M pyramidem [d]. Ergo ex æquali, ut A B C D baſis ad baſim A D E, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A D E M. Et rurſus componendo ut A B C D E baſis ad baſim A D E, ita A B C D E M pyamis ad pyramidem A D E M. Eâdem ratione, et ut F G H K L baſis ad baſim F K L, ita et F G H K L N pyramis ad F K L N pyramidem. Et quodiam duæ pyramides ſunt A D E M, F K L N, quæ triangulares baſes habent, et eâdem ſunt altitudine; erit ut

[c] 5. hujus.

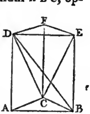
ut A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N [c]. Quod cum fit ut A B C D E basis [e] ad basim A D E, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem A D E M; ut autem A D E basis ad basim F K L, ita A D E M pyramis ad pyramidem F K L N: erit ex æquali, ut basis A B C D E ad F K L basim, ita A B C D E M pyramis ad pyramidem F K L N. Sed et ut F K L basis ad basim F G H K L, ita erat et F K L N pyramis ad pyramidem F G H K L N. Quare rursus ex æquali, ut A B C D E basis ad basim F G H K L, ita est A B C D E M pyramis ad pyramidem F G H K L N. Pyramides igitur, quæ eâdem sunt altitudine, et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

[e] 5. hujus.

## PROP. VII. THEOR. [VII.]

*Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.*

Sit prisma, cujus basis quidem triangulum A B C, oppositum autem ipsi D E F. Dico prisma A B C D E F dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim B D, E C, C D. Et quoniam parallelogrammum est A B E D, cujus diagonalis B D; erit A B D triangulum triangulo E B D æquale [f]. Ergo pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C [g]. Sed pyramis, cujus basis E D B triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum E B C, et vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. Ergo et pyramis, cujus basis triangulum A B D, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi, cujus basis E B C triangulum, et vertex punctum D. Rursus quoniam F C B E parallelogrammum est, cujus diagonalis C E, triangulum E C F triangulo C B E est æquale [f]. Ergo et pyramis, cujus basis B E C triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum E C F, et vertex punctum D [g]. Sed pyramis, cujus basis quidem B C E triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex

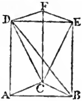



[f] 34. primi.

[g] 5. hujus.

tex

tex C punctum. Quare et pyramis, cujus basis triangulum C E F, et vertex punctum D, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum A B D, et vertex C punctum. Prisma igitur A B C D E F dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cujus basis A B D triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum C A B, et vertex D punctum, iisdem namque planis continetur; pyramis autem, cujus basis triangulum A B D, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cujus basis A B C triangulum, et oppositum ipsi D E F: pyramis igitur, cujus basis triangulum A B C, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet A B C triangulum, et oppositum ipsi triangulum D E F. *Q. E. D.*



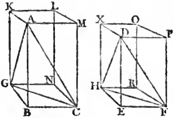

*Cor.* 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, et oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata, quæ triangulares bases habent, et quæ ipsis opponuntur.

*Cor.* 2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

[VIII.] PROP. VIII. THEOR.

*Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum.*

Sint similes et similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula A B C, D E F; vertices autem




G, H, puncta. Dico A B C G pyramidem ad pyramidem D E F H,

DEFH triplicatam proportionem habere ejus, quam BC habet ad EF. Compleantur enim BGML, EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, triangula tria ABC, ABG, GBC, tribus DEF, DEH, HEF singula singulis similia erunt, et similes similium inclinationes [h]. Sed propter similia triangula ABC, DEF, angulus ABC æqualis est angulo DEF, et AB ad BC ut DE ad EF [i]. Quoniam igitur est ut AB ad DE, ita BC ad EF, et circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eâdem ratione, et parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, et parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. Tria igitur parallelogramma BM, KB, BN tribus EP, EX, ER sunt similia. Sed et plana similium similiter inclinata. Et tria quidem MB, BK, BN tribus oppositis æqualia et similia sunt, et similiter inclinata, tria vero EP, EX, ER tribus oppositis æqualia et similia, et similter incltnata [k]. Quare solida BGML, EHPO similibus planis et numero æqualibus et similiter inclinatis continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO [h]. Similia autem solida parallelepipeda in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum [l]. Ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. Sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH [m]; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma, quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum [n]. Quare et pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC habet ad EF. *Q. E. D.*

h Def. 9. undecimi.
i Def. 1. sexti.
k 24. undecimi.
l 33. undecimi.
m 15. quinti.
n Cor. 1. 7. hujus.

*Cor.* Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides, quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicatâ proportione homologorum laterum. Ipsis enim divisis in similes pyramides triangulares bases habentes: quoniam et similia polygona, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et numero æqualia et homologa totis; erit ut una pyramis in unâ pyramide, triangularem habens basim, ad pyramidem in alterâ, triangularem basim habentem, ita et omnes pyramides in unâ pyramide, triangulares habentes bases, ad omnes in alterâ, triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa, mult-

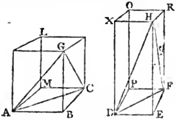
 angulam

angulam habens basim, ad pyramidem, quæ multangulam basim habet. Sed pyramis, triangularem habens basim, ad pyramidem, quæ triangularem basim habet, est in triplicatâ proportione homologorum laterum. Et pyramis igitur, polygonam habens basim, ad pyramidem, similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.

[IX.] PROP. IX. THEOR.

*Æqualium pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales; illæ sunt æquales.*

Sint nempe pyramides æquales, quæ triangulares bases habeant A B C, D E F, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum A B C G, D E F H bases et altitudines




reciprocari; scilicet ut A B C basis ad basim D E F, ita esse pyramidis D E F H altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Compleantur enim BGML, EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis A B C G est æqualis pyramidi D E F H, atque est pyramidis quidem A B C G sextuplum B G M L solidum, pyramidis vero D E F H sextuplum solidum E H P O; erit solidum B G M L solido E H P G æquale [m]. Æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciprocantur [n]. Est igitur ut B M basis ad basim E P, ita E H P O solidi altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed ut B M basis ad basim E P, ita A B C triangulum ad triangulum D E F [m]. Ergo et ut A B C triangulum ad triangulum D E F, ita solidi E H P O altitudo ad altitudinem solidi B G M L. Sed solidi quidem E H P O altitudo eadem est cum altitudine pyramidis D E F H; solidi vero B G M L altitudo eadem

[m] 15. quinti.
[n] 34. undecimi.

eadem eſt cum altitudine pyramidis A B C G: eſt igitur ut ABC baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Quare pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales. Et ſi pyramidum A B C G, D E F H baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, ſitque ut A B C baſis ad baſim D E F, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G: dico A B C G pyramidem pyramidi D E F H æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut A B C baſis ad baſim D E F, ita eſt D E F H pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G; ut autem A B C baſis ad baſim D E F, ita B M parallelogrammum ad parallelogrammum E P: erit et ut parallelogrammum B M ad E P parallelogrammum, ita pyramidis D E F H altitudo ad altitudinem pyramidis A B C G. Sed pyramidis quidem D E F H altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi E H P O; pyramidis vero A B C G altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi B G M L: eſt igitur ut B M baſis ad baſim E P, ita E H P O ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi B G M L. Quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes et altitudines reciprocantur, ea ſunt æqualia [o]. Solidum igitur parallelepipedum B G M L æquale eſt ſolido parallelepipedo E H P O. Atque eſt ſolidi quidem B G M L ſexta pars pyramis A B C G: ſolidi vero E H P O itidem ſexta pars pyramis D E F H. Ergo pyramis A B C G pyramidi D E F H eſt æqualis. Æqualium igitur pyramidum, et triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales: et quarum pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; illæ ſunt æquales. *Q. E. D.*

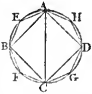
[o] 34. undecimi.

## PROP. X. THEOR. [X.]

*Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet et altitudinem æqualem.*

Habeat conus eandem baſim, quam cylindrus, videlicet circulum A B C D, et altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt, cylindrum coni triplum eſſe. Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus. Et deſcribatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus eſt

quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur prisma æque altum cylindro. Quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum A B C D quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. Et sint ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. Quare prismata inter se sunt ut

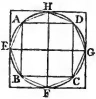



bases [p]. Et prisma igitur erectum a quadrato A B C D dimidium est prismatis erecti a quadrato, quod circa circulum A B C D describitur. Atqui est cylindrus minor prismate erecto a quadrato, quod describitur circa circulum A B C D. Prisma igitur erectum a quadrato A B C D æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H; et A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A jungantur. Unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus est dimidio portionis circuli A B C D, in quâ consistit [q]. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A prismata æque alta cylindro. Ergo et unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri, quæ ad ipsum est. Quoniam si per puncta E, F, G, H parallelæ ipsis A B, B C, C D, D A ducantur, et compleantur in ipsis A B, B C, C D, D A parallelogramma, a quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A [p]. Et sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. Ergo et prismata, quæ in triangulis A E B, B F C, C G D, D H A, majora sunt dimidio portionum cylindri, quæ ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, et hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri, quæ sint minores excessu, quo cylindrus coni triplum superat. Relinquantur jam, et sint A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri, majus est quam triplum coni. Sed prisma, cujus

[p] Cor. 2. 7. hujus.

[q] ostenditur ad 2. hujus.

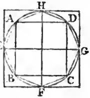
cujus basis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni [r]. Et pyramis igitur cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, major est cono, qui basim habet A B C D circulum. Sed et minor: (ab ipso enim comprehenditur.) Quod fieri non potest. Non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. Si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus coni. Erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. Describatur in A B C D circulo quadratum A B C D. Ergo quadratum A B C D majus est quam dimidium A B C D circuli. Et a quadrato A B C D erigatur pyramis, verticem habens eundem, quem conus; pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum A B C D dimidium ejus, quod circa circulum descriptum est; et si a quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ et prismata appellantur, erit quod a quadrato A B C D erigitur, dimidium ejus, quod erectum est a quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases [s]. Quare et tertiæ partes ipsarum. Pyramis igitur, cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis, quæ a quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis, erecta a quadrato descripto circa circulum, major est cono; ipsum namque comprehendit. Ergo pyramis, cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem, qui coni, major est quam coni dimidium. Secentur circumferentiæ A B, B C, C D, D A bifariam in punctis E, F, G, H. Et jungantur A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Et unumquodque igitur triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in quâ consistit. Erigantur ab unoquoque triangulorum A E B, B F C, C G D, D H A pyramides, verticem habentes eundem, quem conus. Ergo et unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab uno-




[r] Cor. 1. 7. hujus.

[s] Cor. 2. 7. hujus.

quoque triangulorum erigentes pyramides, verticem habentes eundem, quem conus, et hoc semper facientes, relinquemus tandem quasdam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem superat[r]. Relinquantur; et sint quæ in ipsis A E, E B, B F, F C, C G, G D, D H, H A. Reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, et vertex idem, qui coni, major est quam tertia cylindri pars. Sed pyramis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem, qui coni, tertia pars est prismatis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem, quæ cylindri. Prisma igitur, cujus basis A E B F C G D H polygonum, et altitudo eadem, quæ cylindri, majus est cylindro, cujus basis est circulus A B C D. Sed et minus: (ab ipso enim comprehenditur.) Quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. Ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. Ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, et altitudinem æqualem. *Q. E. D.*

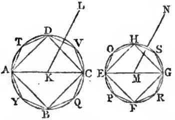



r 1. decimi.

[XI.] PROP. XI. THEOR.

*Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.*

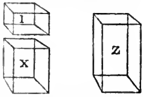
Sint in eâdem altitudine coni et cylindri, quorum bases circuli A B C D, E F G H, axes autem K L, M N, et diametri basium A C, E G. Dico ut A B C D circulus




ad circulum E F G H, ita esse conum A L ad E N conum. Si enim non ita sit; erit ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod solidum minus cono

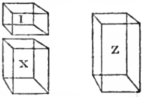
E N,

F N, vel ad majus. Sit primo ad minus, quod sit X. Et quo minus est solidum X cono E N, ei æquale sit I solidum. Conus igitur E N ipsis solidis X, I est æqualis. Describatur in E F G H circulo quadratum E F G H, quod majus est dimidio circuli. Erigatur a quadrato E F G H pyramis æque alta cono. Pyramis igitur erecta




major est coni dimidio. Nam si circa circulum quadratum describamus, et ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium: etenim inter se sunt ut bases [a]. [a] 6. hujus.
Conus autem circumscripta pyramide est minor. Ergo pyramis, cujus basis quadratum E F G H, vertex autem idem, qui coni, major est coni dimidio. Secentur circumferentiæ E F, F G, G H, H E bifariam in punctis P, R, S, O; et O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H, H O jungantur. Unumquodque igitur triangulorum H O E, E P F, F R G, G S H majus est quam dimidium segmenti circuli, in quo consistit. Erigatur ab unoquoque triangulorum H O E, E P F, F R G, G S H pyramis æque alta cono. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt [t]. Relinquantur, et sint quæ in ipsis [t] 1. decimi.
H O, O E, E P, P F, F R, R G, G S, S H. Reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum H O E P F R G S, altitudo autem eadem, quæ coni, major est solido X. Describatur in circulo A B C D polygono H O E P F R G S simile et similiter positum polygonum D T A Y B Q C V, et ab ipso erigatur pyramis æque alta cono A L. Quoniam igitur est ut quadratum ex A C ad quadratum ex E G, ita D T A Y B Q C V polygonum ad polygonum H O E P F R G S [u]; [u] 1. hujus.
ut autem quadratum ex A C ad quadratum ex E G, ita A B C D circulus ad circulum E F G H [x]; erit ut A B C D [x] 2. hujus.
circulus ad circulum E F G H, ita polygonum D T A Y B Q C V ad polygonum H O E P F R G S [y]. Sed ut A B C D circulus [y] 11. quinti.
ad circulum E F G H, ita conus A L ad X solidum; et ut polygonum D T A Y B Q C V ad polygonum H O E P F R G S,

ita pyramis, cujus basis D T A Y B Q C V polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum H O E P F R G S, et vertex punctum N. Ut igitur conus A L ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum D T A Y B Q C V, et vertex punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum H O E P F R G S, et vertex N punctum. Conus autem A L major est pyramide, quæ est in ipso. Majus igitur est solidum X pyramide, quæ est in cono E N. Sed et ostensum est minus. Quod fieri non potest. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita est A L conus ad solidum aliquod minus cono E N. Similiter demonstrabitur neque ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita esse conum E N ad aliquod solidum minus cono A L. Dico præterea neque esse ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita A L conum ad aliquod solidum majus cono E N. Si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. Ergo invertendo ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita erit solidum Z ad A L conum. Sed cum sit solidum Z majus cono E N; erit ut solidum Z ad A L conum, ita conus E N ad aliquod solidum minus cono A L. Et igitur ut E F G H circulus ad circulum A B C D, ita conus E N ad aliquod solidum minus cono A L, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod solidum majus cono E N. Ostensum autem est neque esse ad minus. Ergo ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita est conus A L ad E N conum. Sed ut conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum [x]; est enim uterque utriusque triplus [y]. Et igitur ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. *Q. E. D.*

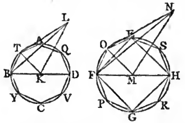



[x] 15. quinti.
[y] 10. hujus.

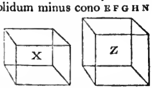
[XII.] PROP. XII. THEOR.

*Similes coni et cylindri inter se sunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.*

Sint similes coni et cylindri, quorum bases quidem circuli A B C D, E F G H, diametri vero basium B D, F H, et

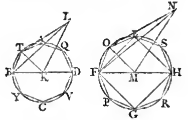



et axes conorum vel cylindrorum K L, M N. Dico conum, cujus basis A B C D circulus, vertex autem punctum L, ad conum, cujus basis circulus E F G H, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus, quam habet B D ad F H. Si enim non habet conus A B C D L ad conum E F G H N triplicatam proportionem ejus, quam B D habet ad F H, habebit A B C D L conus ad aliquod solidum minus cono E F G H N triplicatam proportionem, vel ad majus. Habeat primo ad minus, quod sit X. Et describatur in E F G H circulo quadratum E F G H. Quadratum igitur E F G H

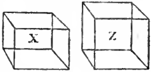



majus est dimidio E F G H circuli. Et erigatur a quadrato E F G H pyramis æque alta cono. Ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. Itaque secentur E F, F G, G H, H E circumferentiæ bifariam in punctis O, P, R, S, et jungantur E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Unumquodque igitur triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E majus est dimidio segmenti circuli E F G H, in quo consistit. Et erigatur ab unoquoque triangulorum E O F, F P G, G R H, H S E pyramis, eundem verticem habens, quem conus. Ergo et unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. Secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam coni portiones, quæ minores erunt excessu, quo conus E F G H N ipsum X solidum superat [a]. Relinquantur, et [a] 1. decimi. fint quæ in ipsis E O, O F, F P, P G, G R, R H, H S, S E. Reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem polygonum

E O F-



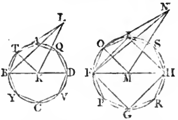

E O F P G R H S, vertex autem N punctum, major est solido X. Describatur etiam in circulo A B C D, polygono E O F P G R H S simile et similiter positum polygonum A T B Y C V D Q: a quo erigatur pyramis, eundem verticem habens, quem conus; et triangulorum continentium pyramidem, cujus basis quidem



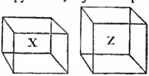

est polygonum A T B Y C V D Q, vertex autem punctum L, unum sit L B T; triangulorum vero continentium pyramidem, cujus basis E O F P G R H S polygonum, et vertex punctum N, unum sit N F O; et jungantur K T, M O. Quoniam igitur conus A B C D L similis est cono E F G H N, erit ut B D ad F H, ita K L axis ad axem
[x] Def. 24. undecimi. M N [x]. Ut autem B D ad F H, ita B K ad F M [y]. Itaque
[y] 15. quinti. ut B K ad F M, ita K L ad M N; et permutando ut B K ad K L, ita F M ad M N. Et cum perpendicularis utraque est, et circa æquales angulos B K L, F M N latera sunt proportionalia: simile igitur est B K L triangulum
[z] 6. sexti. triangulo F M N [z]. Rursus quoniam est ut B K ad K T, ita F M ad M O, et circa æquales angulos B K T, F M O latera sunt proportionalia (etenim quæ pars est angulus B K T quatuor rectorum, qui sunt ad K centrum, eadem est pars et angulus F M O quatuor rectorum, qui sunt ad centrum M) erit triangulum B K T triangulo F M O simile [z]. Et quoniam ostensum est ut B K ad K L, ita esse F M ad M N; æqualis autem est B K ipsi K T, et F M ipsi M O: erit ut T K ad K L, ita O M ad M N; et circa æquales angulos T K L, O M N latera sunt proportionalia; recti enim sunt: triangulum igitur L K T simile est triangulo M N O. Quod cum ob similitudinem triangulorum B K L, F M N, sit ut L B ad B K, ita N F ad F M; ob similitudinem vero triangulorum B K T, F M O, ut

K B

K B ad B T, ita M F ad F O: erit ex æquali ut L B ad B T, ita N F ad F O. Rursus cum ob similitudinem triangulorum L T K, N O M, sit ut L T ad T K, ita N O ad O M; et ob similitudinem triangulorum K B T, O M F, ut K T ad T B, ita M O ad O F: ex æquali erit ut L T ad T B, ita N O ad O F. Ostensum autem est et ut T B ad B L, ita O F ad F N. Quare rursus ex æquali ut T L ad L B, ita O N ad N F. Triangulorum igitur L T B, N O F proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt L T B, N O F triangula, et inter se similia[y]. Sed [y 5. sexti.] cum angulorum planorum æqualium T B K, O F M verticibus rectæ sublimes B L, F N insistant, quæ cum rectis B T, F O; B K, F M angulos æquales faciunt; angulum scilicet T B L angulo O F N æqualem, et angulum K B L angulo M F N: similes erunt planorum L B T, L B K inter se et tertio T B K, atque planorum N F O, N F M inter se et tertio O F M, inclinationes[z]. Quare et pyramis, [z 2 Cor. 30. hujus. Vide Addenda.] cujus basis triangulum B K T, vertex autem L punctum, similis est pyramidi, cujus basis F M O triangulum, et vertex punctum N; similibus enim planis continentur, et multitudine æqualibus, et similiter inclinatis. Pyramides autem similes, et quæ triangulares bases habent, in triplicatâ sunt proportione homologorum laterum[a]. Ergo [a 8. hujus.] pyramis B K T L ad pyramidem F M O N triplicatam habet proportionem ejus, quam B K habet ad F M. Similiter a punctis quidem A, Q, D, V, C, Y ad K, a punctis vero E, S, H, R, G, P ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides, vertices eosdem habentes, quos coni; ostendemus et unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B K latus ad homologum latus M F, hoc est, quam B D ad F H. Sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia[b]. [b 12. quinti.] Est igitur et ut B K T L pyramis ad pyramidem F M O N, ita tota pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Quare et pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Ponitur autem conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam




catam proportionem habere ejus, quam B D ad F H. Ut igitur conus, cujus basis circulus A B C D, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est pyramis, cujus basis A T B Y C V D Q polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem, cujus basis polygonum E O F P G R H S, et vertex punctum N. Dictus autem conus major est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit. Majus igitur est et solidum X pyramide, cujus basis polygonum E O F P G R H S, vertex autem punctum N. Sed et minus. Quod fieri non potest. Non igitur conus, cujus basis A B C D circulus, et vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus E F G H, et vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus, quam B D habet ad F H. Similiter demonstrabimus neque conum E F G H N ad aliquod solidum minus cono A B C D L triplicatam proportionem habere ejus, quam habet F H ad B D. Itaque dico neque A B C D L conum ad solidum majus cono E F G H N triplicatam habere proportionem ejus, quam B D habet ad F H. Si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. Invertendo igitur, solidum Z ad conum A B C D L triplicatam proportionem habet ejus, quam F H ad B D. Cum autem est solidum Z majus cono E F G H N; erit ut solidum Z ad conum A B C D L, ita E F G H N conus ad aliquod solidum minus cono A B C D L. Ergo et conus E F G H N ad solidum aliquod minus cono A B C D L triplicatam proportionem habebit ejus, quam F H habet ad B D, quod fieri non posse demonstratum est. Non igitur A B C D L conus ad solidum aliquod majus cono E F G H N triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ostensum autem est neque



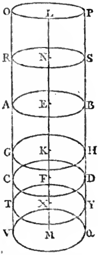
neque ad minus. Quare conus A B C D L ad E F G H N conum triplicatam proportionem habet ejus, quam B D ad F H. Ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum [c]. Cylindrus enim in eâdem exiſtens baſi, in quâ conus, et ipſi æque altus, coni triplus eſt [d]. Cum oſtenſum ſit, omnem conum tertiam partem eſſe cylindri, eandem quam ipſe baſim habentis, et æqualem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus, quam B D habet ad F H. Similes igitur coni et cylindri inter ſe ſunt in triplicatâ proportione diametrorum, quæ ſunt in baſibus. *Q. E. D.*

[c] 15. quinti. [d] 10. hujus.

## PROP. XIII. THEOR. [XIII.]

*Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.*

Cylindrus enim A D plano G H ſecetur oppoſitis planis A B, C D parallelo. Planum autem G H occurrat axi E F in K puncto. Dico ut B G cylindrus ad cylindrum G D, ita eſſe E K axem ad axem K F. Producatur enim E F axis ex utrâque parte ad puncta L, M; et ipſi quidem E K axi ponantur æquales quotcunque E N, N L; ipſi vero F K æquales quotcunque F X, X M; et per puncta L, N, X, M, ducantur plana ipſis A B, C D parallela: atque in planis per L, N, X, M circa centra L, N, X, M intelligantur circuli O P, R S, T Y, V Q æquales ipſis A B, C D; et cylindri P R, R B, D T, T Q intelligantur. Quoniam igitur axes L N, N E, E K inter ſe ſunt æquales, erunt cylindri P R, R B, B G inter ſe ut baſes [e]. Æquales autem ſunt baſes. Ergo et cylindri P R, R B, B G ſunt æquales. Quod cum axes L N, N E, E K inter ſe æquales ſint, itemque cylindri P R, R E, B G inter ſe æquales; ſitque ipſorum L N, N E, E K multitudo æqualis multitudini ipſorum P R, R B, B G: quotuplex eſt axis K L ipſius E K axis, totuplex erit et P G cylindrus cylindri G B. Eâdem ratione et quotuplex eſt M K axis ipſius axis K F, totuplex eſt et Q G cylindrus cylindri G D. Et ſi quidem



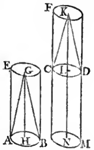

[e] 11. hujus.

axis

axis K L sit æqualis axi K M, erit et P G cylindrus cylindro G Q æqualis; si autem axis L K major sit axe K M, et cylindrus P G major erit cylindro G Q; et si minor, minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus E K, K F, et cylindris B G, G D, sumpta sunt æquimultiplicia axis quidem E K, et B G cylindri, nempe axis K L, et cylindrus P G; axis vero K F, et cylindri G D æquimultiplicia, axis scilicet K M, et G Q cylindrus; et demonstratum est, si L K axis superat axem K M, et P G cylindrum superare cylindrum G Q; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Est igitur axis E K ad axem K F, ut B G cylindrus ad cylindrum
[f] Def. 5. quinti. G D [f]. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. *Q. E. D.*

[XIV.] PROP. XIV. THEOR.

*In æqualibus basibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines.*

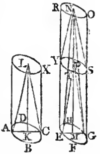



Sint enim in æqualibus basibus A B, C D cylindri E B, F D. Dico ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita esse G H axem ad axem K L. Producatur enim K L, axis ad punctum N; ponaturque ipsi G H axi æqualis L N; et circa axem L N intelligatur cylindrus C M. Quoniam igitur cylindri E B, C M eandem habent altitudinem, inter
[g] 11. hujus. se sunt ut bases [g]. Bases autem sunt æquales. Ergo et cylindri E B, C M inter se æquales erunt. Et quoniam cylindrus F M secatur plano C D, oppositis planis parallelo, erit ut C M
[h] 13. hujus. cylindrus ad cylindrum F D, ita axis L N ad K L axem [h]. Æqualis autem est cylindrus quidem C M cylindro E B; axis vero L N axi G H. Est igitur ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita axis G H ad K L axem. Ut autem E B cylindrus ad cylindrum F D, ita A B G conus ad
[i] 15. quinti. conum C D K [i]; cylindri sunt enim conorum tripli [k].
[k] 10. hujus. Ergo et ut G H axis ad axem K L, ita est A B G conus ad conum C D K, et cylindrus E B ad F D cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines. *Q. E. D.*

PROP.

## PROP. XV. THEOR. [XV.]

*Æqualium conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.*



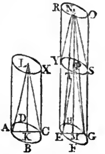

Sint æquales coni et cylindri, quorum bases quidem sint A B C D, E F G H circuli, diametris A C, E G; axes autem K L, M N; qui quidem et conorum vel cylindorum sunt altitudines. Dico cylindrorum A X, E O bases et altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut A B C D basis ad basim E F G H, ita esse altitudinem M N ad altitudinem K L. Altitudo enim K L vel æqualis est altitudini M N, vel non æqualis. Sit primo æqualis. Atque est A X cylindrus æqualis cylindro E O. Qui autem eandem habent altitudinem coni et cylindri, inter se sunt ut bases[l]. Æqualis igitur est basis A B C D basi E F G H. Est[l] igitur ut basis A B C D ad E F G H basim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Non sit autem altitudo K L altitudini M N æqualis. Altera igitur ipsarum major. Major sit M N; et auferatur ab ipsâ M N altitudini L K æqualis P M, et per P secetur E O cylindrus plano T Y S, oppositis planis circulorum E F G H, R O parallelo; intelligaturque cylindrus E S, cujus basis quidem E F G H circulus, altitudo autem P M. Quoniam igitur A X cylindrus æqualis est cylindro E O, alius autem aliquis est cylindrus E S; erit ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Sed ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita basis A B C D ad E F G H basim[l]; cylindri enim A X, E S eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus E O ad E S cylindrum, ita M N altitudo ad altitudinem M P[m]; nam cylindrus E O secatur plano T Y S, oppositis planis parallelo. Est igitur ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad M P altitudinem. Æqualis autem est M P altitudo altitudini K L. Quare ut basis A B C D ad E F G H basim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. Æqualium igitur

[l] 11. hujus.

[m] 13. hujus.

igitur cylindrorum A X, E O bafes et altitudines reciproce funt proportionales.

Sed fi cylindrorum A X, E O bafes et altitudines funt reciproce proportionales: hoc eft, ut A B C D bafis ad bafim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem. Dico A X cylindrum cylindro E O æqualem effe. Iifdem enim conftructis; quoniam ut A B C D bafis ad bafim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem; altitudo autem K L æqualis eft altitudini M P: erit ut A B C D bafis ad bafim E F G H, ita M N altitudo ad altitudinem M P. Sed ut A B C D bafis ad bafim E F G H, ita A X cylindrus ad cylindrum E S;

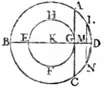



* 11. hujus. eandem enim habent altitudinem[a]. Ut autem M N altitudo ad altitudinem M P, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Eft igitur ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. Cylindrus igitur A X cylindro E O eft æqualis. Similiter autem et in conis. *Q. E. D.*

[XVI.] PROP. XVI. PROBL.

*Duobus circulis circa idem centrum exiftentibus, in majori polygonum æquilaterum, et pari laterum numero defcribere, quod minorem circulum non tangat.*

Sint dati duo circuli A B C D, E F G H circa idem centrum K. Oportet in majori circulo A B C D polygonum æquilaterum et pari laterum numero defcribere, non tangens minorem circulum E F G H. Ducatur per K centrum recta linea B D, atque a puncto G ipfi B D ad rectos angulos ducatur A G, et ad C producatur,




* 16. tertii. quæ A C circulum E F G H tanget[o]. Itaque circumferentiam B A D bifariam fecantes, et ejus dimidium rurfus bifariam, et hoc femper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipfâ A D. Relinquatur, fitque L D: et a puncto L ad B D perpendicularis agatur L M, et ad N producatur; junganturque L D,

L D, D N. Ergo L D ipsi D N est æqualis [p], et quoniam L N parallela est A C, et A C tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget. Et multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D, D N. Quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium et numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. *Q.E.F.* [p] 29. tertii.

## PROP. XVII. PROBL. [XVII.]

*Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod suâ superficie minorem non contingat.*

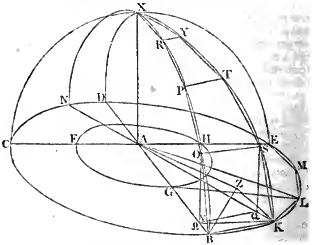
Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. Oportet in majori sphærâ describere solidum polyhedrum, quod suâ superficie minorem non contingat. Secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto: sectiones erunt circuli; quoniam diametro manente et semicirculo circumducto sphæra facta est [q]. Ergo in quâcunque positione semicirculum intelligamus, quod per centrum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet; et constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ, quæ et semicirculi diameter est, maxima sit rectarum, quæ in circulo vel sphærâ ducuntur [r]. Sit igitur in majori quidem sphærâ circulus B C D E, in minori autem circulus F G H; et ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D, C E. Occurrat B D minori circulo in G; ducatur a puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, et jungatur A L. Itaque circumferentiam E B bifariam secantes, et dimidium ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem eâ parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur a rectâ æquali ipsi G L. Relinquatur, sitque circumferentia B K. Minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium et parium numero laterum non tangentis minorem circulum. Sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K, K L, L M, M E; et juncta K A producatur ad N; et a puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos constituatur A X [s], quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, et per A X et utramque ipsarum B D, K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. Itaque efficiant, et sint in diametris B D, K N eorum semicirculi B X D, K X N. Quoniam

[q] Def. 14. undecimi.

[r] 15. tertii.

[s] 12. undec.

K k igitur

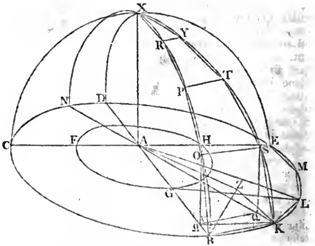



igitur X A recta est ad planum circuli B C D E, erunt omnia plana, quæ per ipsam X A transeunt, ad idem circuli planum recta[t]: quare et semicirculi B X D, K X N recti sunt ad idem planum. Et quoniam semicirculi B E D, B X D, K X N æquales sunt, in æqualibus enim consistunt B D, K N diametris; erunt et eorum quadrantes B E, B X, K X inter se æquales. Quot igitur latera polygoni sunt in quadrante B E, tot erunt et in quadrantibus B X, K X, æqualia ipsis B K, K L, L M, M E. Inscribantur, et sint B O, O P, P R, R X; K S, S T, T Y, Y X: junganturque S O, T P, Y R; et ab ipsis O, S ad planum circuli B C D E perpendiculares ducantur. Cadent hæ in communes planorum sectiones B D, K N; quoniam et plana semicirculorum B X D, K X N ad planum circuli B C D E recta sunt[u]. Itaque cadant, sintque O V, S Ω; et V Ω jungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis B X D, K X N æquales circumferentiæ sumptæ sint B O, K S, et ductæ perpendiculares O V, S Ω; erit O V quidem ipsi S Ω æqualis, B V vero æqualis K Ω. Est autem et tota B A æqualis toti K A. Ergo et reliqua V A reliquæ Ω A est æqualis. Igitur ut B V ad V A, ita K Ω ad Ω A: ideoque V Ω ipsi B K parallela est[x]. Quod cum utraque ipsarum O V, S Ω recta sit ad circuli B C D E planum, erit O V ipsi S Ω parallela[y]. Ostensa autem est et ipsi æqualis. Ergo Ω V, S O æquales sunt et parallelæ,

t 18. undecimi.
u 38. undecimi.
x 2. sexti.
y 6. undecimi.

lelæ[z]. Et quoniam Q V parallela eſt ipſi S O, ſed et parallela ipſi K B; erit et S O ipſi K B parallela[a]; et ipſas conjungunt B O, K S. Ergo et K B O S quadrilaterum eſt in uno plano: nam ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, et in utrâque ipſarum quævis puncta ſumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem eſt plano, in quo parallelæ[b]. Et eâdem ratione ipſorum quadrilaterorum S O P T, T P R Y utrumque in uno eſt plano. Eſt autem in uno plano et triangulum Y R X[c]. Si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida polyhedra inter circumferentias B X, K X, ex pyramidibus compoſita, quarum baſes quidem K B O S, S O P T, T P R Y quadrilatera, et triangulum Y R X; vertex autem punctum A. Quod ſi in unoquoque laterum K L, L M, M E, quemadmodum in K B eadem conſtruamus; et in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo hemiſphærio conſtituetur figura quædam polyhedra in ſphærâ deſcripta, et compoſita ex pyramidibus, quarum baſes ſunt quadrilatera jam dicta, et Y R X triangulum, et aliæ ejuſdem ordinis ſimili modo conſtructæ, cum vertex omnium communis ſit punctum A. Dico dictam figuram polyhedram ſuâ ſuperficie non contingere minorem ſphæram, in quâ eſt circulus F G H. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri K B S O perpendicularis A Z[d], quæ plano in puncto Z occurrat; et B Z, Z K jungantur. Itaque quoniam A Z recta eſt ad quadrilateri K B S O planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, et in eodem ſunt plano, rectos angulos faciet[e]. Ergo A Z ad utramque ipſarum B Z, Z K eſt perpendicularis. Et quoniam A B eſt æqualis A K, erit et quadratum ex A B quadrato ex A K æquale; et ſunt quadrato quidem ex A B æqualia quadrata ex A Z, Z B, angulus enim ad Z rectus eſt[f]; quadrato autem ex A K æqualia ex A Z, Z K quadrata. Ergo quadrata ex A Z, Z B quadratis ex A Z, Z K æqualia ſunt. Commune auferatur quadratum ex A Z. Reliquum igitur quod ex B Z reliquo quod ex Z K eſt æquale. Ergo recta B Z rectæ Z K æqualis. Similiter oſtendemus, et quæ a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipſarum B Z, Z K æquales eſſe. Circulus igitur centro Z et intervallo unâ ipſarum Z B, Z K deſcriptus etiam per puncta O, S tranſibit. Et quoniam in circulo eſt B K S O quadrilaterum, et ſunt æquales O B, B K, K S, et minor

[z] 33. primi.
[a] 9. undecimi.
[b] 7. undecimi.
[c] 2. undecimi.
[d] 11. undecimi.
[e] Def. 3. undecimi.
[f] 47. primi.




OS; erit angulus BZK obtusus†; ideoque BK major quam BZ. Sed et GL quam BK est major. Multo igitur major est GL quam BZ; et quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. Et cum æqualis sit AL ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale: sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG, GL, quadrato autem ex AB, æqualia quadrata ex BZ, ZA; quadrata igitur ex AG, GL æqualia sunt quadratis ex BZ, ZA: quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL. Ergo reliquum ex ZA quadratum majus est quadrato ex AG; et ob id recta linea ZA major est rectâ AG. Sed punctum G est ad superficiem sphæræ minoris. Quare punctum Z extra illam sphæram. Recta autem AZ, in planum BOKS ad perpendiculum deducta, minima est rectarum omnium, quæ a puncto A in planum illud deduci poterunt. Quare aliud omne punctum plani BOKS, vel magis etiam quam punctum Z, extra sphæram minorem erit. Totum igitur planum BOKS extra sphæram minorem. Similiter et de alio quovis polyhedri plano ostendetur extra sphæram minorem esse.




† *Nimirum cum tres* BK, BO, KS *circulo* BKSO *inscriptæ, inter se æquales sint, quarta autem* OS *unaquâque trium minor, erit arcus* BK *quadrante major. Quapropter angulus* BZK, *ad circuli centrum* Z *arcui* BK *insistens, recto major erit.*

Tota

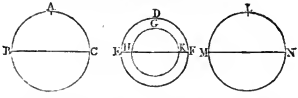
Tota igitur polyhedri ſuperficies extra ſphæram illam. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt, quod ſuâ ſuperficie minorem non contingit. *Q. E. F.*

*Cor.* Quod ſi etiam in alterâ ſphærâ ſolido polyhedro deſcripto, in ſphærâ B C D E ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur; habebit ſolidum polyhedrum in ſphærâ B C D E ad ſolidum polyhedrum in alterâ ſphærâ triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ BCDE habet ad alterius ſphæræ diametrum. Diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, et ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. Similes autem pyramides inter ſe in triplicatâ ſunt proportione homologorum laterum. Ergo pyramis, cujus baſis eſt K B O S quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in alterâ ſphærâ ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc eſt, quam habet A B ex centro ſphæræ, circa centrum A exiſtentis, ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Similiter et unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphærâ circa centrum A, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. Quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphærâ circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in alterâ ſphærâ, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet B D diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

## PROP. XVIII. THEOR. [XVIII.]

*Sphæræ inter ſe in triplicatâ ſunt proportione ſuarum diametrorum.*

Intelligantur ſphæræ A B C, D E F; quarum diametri B C, E F. Dico A B C ſphæram ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita eſt, ſphæra A B C ad ſphæram minorem ipſâ D E F, vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. Et intelligatur ſphæra D E F circa idem centrum, circa quod ſphæra G H K: deſcribaturque in majori ſphærâ D E F ſolidum




solidum polyhedrum superficie suâ non contingens minorem sphæram G H K [g]; et in sphærâ A B C describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphærâ D E F descriptum est. Solidum igitur polyhedrum, quod in sphærâ A B C, ad solidum polyhedrum, quod in sphærâ D E F, triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F [h]. Habet autem A B C sphæra ad sphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. Ergo ut A B C sphæra ad sphæram G H K, ita solidum polyhedrum in sphærâ A B C ad solidum polyhedrum in sphærâ D E F; et permutando, ut A B C sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsâ est, ita G H K sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphærâ D E F. Major autem est sphæra A B C solido polyhedro, quod est in ipsâ. Ergo et G H K sphæra polyhedro, quod in sphærâ D E F, est major. Sed et minor, ab ipso enim comprehenditur; quod fieri non potest. Non igitur A B C sphæra ad sphæram minorem ipsâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Similiter ostendemus neque D E F sphæram ad sphæram minorem ipsâ A B C triplicatam habere proportionem ejus, quam habet E F ad B C. Dico insuper sphæram A B C neque ad majorem sphæram ipsâ D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam B C ad E F. Si enim fieri potest, habeat ad majorem L M N. Invertendo igitur, sphæra L M N ad A B C sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter E F ad B C diametrum. Ut autem sphæra L M N ad A B C sphæram, ita sphæra D E F ad sphæram quandam minorem ipsâ A B C, quoniam sphæra L M N major est ipsâ D E F. Ergo et D E F sphæra ad sphæram minorem ipsâ A B C triplicatam proportionem habet ejus, quam E F ad B C; quod fieri non posse ostensum est. Non igitur A B C sphæra ad sphæram majorem ipsâ D E F triplicatam proportionem habet ejus, quam B C ad E F. Ostensum autem est neque ad minorem. Ergo A B C sphæra ad sphæram D E F triplicatam proportionem habebit ejus, quam B C ad E F. *Q. E. D.*

[g] 17. hujus.

[h] Cor. 17. hujus.

AD-

# ADDENDA.

## LIB. V. PROP. XXVI.

*Cor.* * (Clavii) Si prima ad fecundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, habeat autem et quinta quædam, primæ detracta, ad fecundam eandem proportionem quam fexta quædam, tertiæ detracta, ad quartam; et reliqua primæ ad fecundam eandem proportionem habet, quam reliqua tertiæ ad quartam.

## LIB. X. PROP. X.

*Cor.* * Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima autem fecundæ potentiâ tantum fit commenfurabilis; tertia quoque quartæ potentiâ tantum commenfurabilis erit.

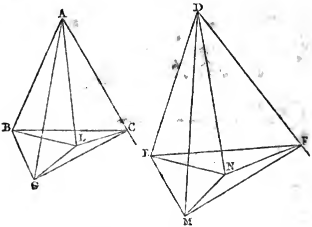
## LIB. XI. PROP. XXXV.

*Cor.* 2. * Si fint duo anguli plani æquales (BAC, EDF) quorum verticibus (A, D) fublimes rectæ lineæ (AG, DM) infiftant, quæ cum rectis principio pofitis (AB, DE, AC, DF) angulos æquales, alterum alteri, contineant; angulum quidem MDE angulo GAB, et angulum MDF angulo GAC æqualem; plana angulorum BAG, CAG fimiliter inter fe, et tertio anguli BAC plano, funt inclinata, atque plana angulorum BDM, FDM inter fe, et tertio anguli EDF plano. Et folidus angulus ad A folido ad D æqualis eft.

Sumptis enim AG, DM æqualibus, et a punctis G, M rectis GL, MN in plana BAC, EDF ad perpendiculum demiffis; rectæ illæ GL, MN inter fe æquales erunt [a]. Junctifque LA, ND, anguli GAL, MDN inter fe æquales [b]. Et figuris ut prius conftructis, in triangulis ABL,

[a] Cor. 1.

[b] Per hanc Prop.



A B L, D E N, ad B et E rectangulis, erit B L ad E N, ut A B ad D E. Sic enim ostensum. Similia igitur sunt triangula A B L, D E N, et æquales habent angulos, quibus latera homologa subtenduntur. Anguli igitur B A L, E D N inter se æquales. Hæc cum ita sint, plana B A G, C A G similiter inter se, et tertio A B C, atque plana E D M, F D M inter se, et tertio E D F inclinari, et angulum solidum ad A solido ad D æqualem esse, ex constructione vicesimæ sextæ hujus libri manifestum est. *Q. E. D.*

## LIB. XI. PROP. XXXIX.

*Cor.* 1.* Duæ parallelepipedi cujusque diagonales se mutuo medias dividunt.

*Cor.* 2.* Parallelepipedi cujusque rectanguli diagonales inter se æquales sunt.

Ea autem parallelepipeda voco *rectangula*, quorum stantes rectæ lineæ ad perpendiculum sunt basium planis.

# CORRIGENDA.

Pag. 14 lin. 17, *pro* G H *lege* C H
—— 15 —— 10, *pro* duabus *lege* duobus
—— 20 —— 1, *pro* ponatur *lege* Exponatur
—— 46 —— 10, *dele* Sed et rectangulum
—— 56 —— 4, *pro* fiunt lateribus *lege* fiunt a lateribus
—— 63 —— 24, *pro* E *lege* F
—— 75 —— 36, *pro* duabus *lege* duobus
—— 80 —— 34, *pro* habent. Sed *lege* habent; fed
—— 130 —— 26, *pro* O *lege* H
—— 147 —— 28, *pro* conditione *lege* conditioni
—— 167 —— 17, *pro* fumpti *lege* fumptis
—— 169 —— 7, *pro* angulem *lege* angulum
—— 262 —— 39, *pro* Def. 1. primi *lege* Def. 1. hujus.
—— 267 —— 25, *pro* cirt *lege* erit
—— 281 —— 18, *pro* quædam A B *lege* quædam rationalis A B
—— 291 —— 23, *pro* poteft *lege* poffit
—— 347 —— 24, *pro* erunt *lege* erit
—— 393 —— penult. *pro* continentur *lege* continetur
—— 408 —— 14, *pro* ad *lege* ab
—— 412 —— 21, *pro* fuperficie, mutua *lege* fuperficie planâ, mutua †
—— 427 —— 30, *pro* B C *lege* D C
—— 433 —— penult. *pro* Simpfonus *lege* Simfonus
—— 477 —— 18, *pro* A E C G *lege* A B C G.

† *Nempe in Græcis, in definitione anguli folidi excidiffe arbitramur adjectivum* ἐπίπεδον, *fubftantivo* ἐπιφανείᾳ *apponendum, ut definitio generalis fiat. Etenim ad* Coni *verticem (ex. gr.) angulus proculdubio eft folidus, quem rectæ lineæ innumeræ conftituunt, ad punctum unum, coni verticem, collectæ; quæ quidem rectæ in eâdem omnes funt fuperficie, minime vero in eâdem* planâ, *in* conicâ *enim fuperficie: et alii complures funt anguli folidi, quorum par eft ratio. Quos tamen definitione fuâ Euclidem excludere voluiffe haud putamus; præfertim cum angulus quifque folidus ad coni verticem, aliique complures qui fuperficiebus non planis continentur, aliis, qui planis continentur, æquales fint.*

*Illud autem accurate animadvertendum—Alteram, quæ ponitur anguli folidi, definitionem, utpote planis comprehenfi, ita ad conicum accommodari, fi angulorum planorum numerus infinite augeri intelligatur, magnitudine cujufque fingulatim infinite imminutâ. Cæterum infcite admodum Simfonus definitionum anguli folidi, quas duas Euclides pofuit, alterâ repudiatâ, alteram illam retinere maluit, quæ vel minus univerfalis eft, vel, fi aliter, ea faltem de quâ, univerfalem effe, non æque manifeftum eft.*